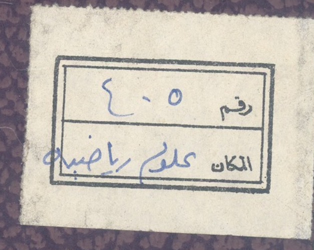

رقم ٤٠٥
المكان علوم رياضية

الجزء الثالث

من

كتاب الدرر البهية في الاصول الحسابية

تأليف

محمد افندى ادريس

مدرس رياضة بمدرسة المعلمين الناصرية

(الطبعة الثانية)

بعد تنقيحها واضافة زيادات نافعة

بالمطبعة الاميرية بمصر

١٣٢٦ هجرية



بسم الله الرحمن الرحيم

النسبة

٣٢٧ ـ النسبة هى العدد الناتج من مقارنة كمية بكمية أخرى من نوعها

ومقارنة أى كميتين هى إما لمعرفة مقدار زيادة احداهما عن الاخرى أو لمعرفة عدد مرات احتواء احداهما على الاخرى

فإذا أريد معرفة مقدار زيادة احدى الكميتين عن الأخرى سميت نسبة عددية واذا أريد معرفة مقدار احتواء الاولى على الثانية سميت نسبة هندسية

فالنسبة العددية بين ١٢ و ٤ هى ١٢ — ٤ = ٨

والنسبة الهندسية بين ١٢ و ٤ هى ١٢ ÷ ٤ = ٣

ولكن حيث ان استعمال المقارنة بتقدير الزيادة قليل جدا فى التطبيقات والمستعمل هو المقارنة باحتواء احدى الكميتين على الاخرى فمتى أطلقت النسبة تنصرف الى الهندسية

٣٢٨ – يكفى لايجاد النسبة بين كميتين أن تقسم احداهما على الاخرى

فالنسبة بين ١٥ و ٣ هى ١٥ : ٣ = ٥ والنسبة بين ٣ و ٤ هى $\frac{٣}{٤}$
والنسبة بين $\frac{٧}{٨}$ و $\frac{٥}{٩}$ هى $\frac{٧}{٨}$: $\frac{٥}{٩}$ = $\frac{٦٣}{٤٠}$

ولايجاد النسبة بين خطين مثل ا ب و حـ د يقاسان بوحدة مشتركة ثم نبحث عن النسبة بين العددين الدالين على مقاسيهما

فاذا فرض أن ا ب = ١٤ مترا و حـ د = ٧ أمتار تكون النسبة بينها هى $\frac{١٤}{٧}$ = ٢ أعنى أن ا ب = ٢ حـ د

واذا فرض ان ا ب = ٤ أمتار و حـ د = ٧ أمتار تكون النسبة بينهما هى $\frac{٤}{٧}$ أعنى أن ا ب = $\frac{٤}{٧}$ حـ د

ولايضاح ذلك يقال حيث أن حـ د = ٧ أمتار فالمتر يكون سبعه وحينئذ فالخط ا ب الذى طوله أربعة أمتار يكون أربعة أسباعه

وقس على ذلك ما اذا أريد ايجاد النسبة بين سطحين أو جسمين فانه يقسم العدد الدال على مقاس أحدهما على العدد الدال على مقاس الآخر

وينتج مما ذكر أن النسبة عبارة عن اتخاذ احدى الكميتين وحدة ومقارنة الاخرى بها

٣٢٩ – العدد الدال على الكمية الاولى (المقسوم) يسمى المنسوب والعدد الدال على الكمية الثانية (المقسوم عليه) يسمى المنسوب اليه والعددان يسميان حدّى النسبة

ففى النسبة بين ١٢ , ٤ وهى ٣ يسمى العدد ١٢ منسوبا والعدد ٤ منسوبا اليه وهما حدّا النسبة وفى النسبة بين ٤ , ١٢ وهى $\frac{١}{٣}$ يسمى العدد ٤ منسوبا والعدد ١٢ منسوبا اليه وهما حدّا النسبة

وتبين النسبة عادة بكتابة حدّيها على هيئة كسر اعتيادى أو بينهما علامة القسمة هذه :

ولا فرق بين أن يكون حدّا النســـبة عددين صحيحين أو كسرين أو عددين كسريين أو أحدهما صحيح والآخر كسر أو عدد كسرى

فالنســـبة بين ١٢ , ٦ تكتب $\frac{١٢}{٦}$ أو ١٢ : ٦

والنسبة بين $\frac{٥}{٧}$, $\frac{٣}{٨}$ تكتب $\frac{\frac{٥}{٧}}{\frac{٣}{٨}}$ أو $\frac{٥}{٧}$: $\frac{٣}{٨}$

والنسبة بين ٣ $\frac{١}{٢}$, ٤ $\frac{١}{٥}$ تكتب $\frac{٣\frac{١}{٢}}{٤\frac{١}{٥}}$ أو ٣ $\frac{١}{٢}$: ٤ $\frac{١}{٥}$ وهكذا

٣٣٠ ـ النسبتان المتعاكستان هما المركبتان من حدود متحدة موضوعة بترتيب مختلف

فالنسبتان $\frac{٣}{٤}$, $\frac{٤}{٣}$ هما متعاكستان

حاصل ضرب النسبتين المتعاكستين يساوى واحدا

اذ أن $\frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٣} = \frac{٣ \times ٤}{٤ \times ٣} = ١$

خواص النسب

٣٣١ ـ حيث أن النسبة عبارة عن خارج قسمة عددين وانها تبين بكسر بسـطه المنسوب ومقامه المنسوب اليه فبناء على ماتقـدم فى خواص الكسور وقواعدها تستنتج الخواص الآتية

أولا ــ لا تتغير النسبة بضرب حدّيها فى عدد واحد ولا بقسمتهما على عدد واحد فالنسبة بين ١٨ , ٦ أى $\frac{١٨}{٦} = \frac{١٨ \times ٥}{٦ \times ٥}$ وكل منهما هى ٣
والنسبة بين ١٨ , ٦ أى $\frac{١٨}{٦} = \frac{١٨ \div ٢}{٦ \div ٢}$ وكل منهما هى ٢

ثانيا ــ يمكن اختزال النسبة بالطريقة التى اختزلت بها الكسور
فالنسبة بين ٢٤ , ٩٦ أى $\frac{٢٤}{٩٦} = \frac{١}{٤}$

ثالثا ــ يمكن تجنيس نسبتين أو عدّة نسب كما جنست الكسور وتكون النسب الناتجة مكافئة للنسب الاصلية على التناظر
فالنسبتان $\frac{٧}{٨}$, $\frac{٥}{٩}$ تكافئان للنسبتين $\frac{٦٣}{٧٢}$, $\frac{٤٠}{٧٢}$ على التناظر
والنسب $\frac{٣}{٤}$, $\frac{٥}{٧}$, $\frac{٧}{٩}$ تكافئ النسب $\frac{١٨٩}{٢٥٢}$, $\frac{١٨٠}{٢٥٢}$, $\frac{١٩٦}{٢٥٢}$ على التناظر

رابعا ــ يمكن جمع أو طرح عدّة نسب كما جمعت وطرحت الكسور
مثلا $\frac{٣}{٤} + \frac{٥}{٦} + \frac{٧}{٨} = \frac{٥٩}{٢٤} = ٢\frac{١١}{٢٤}$
وبالمثل $\frac{٥}{٧} - \frac{١}{٩} = \frac{٣٨}{٦٣}$

خامسا ــ يمكن ضرب نسبتين أو عدّة نسب فى بعضهما بالطريقة التى أتبعت فى ضرب الكسور
مثلا $\frac{٥}{٧} \times \frac{٤}{٩} = \frac{٢٠}{٦٣}$, $\frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٥} \times \frac{٥}{٦} = \frac{١}{٢}$

سادسا ــ يمكن قسمة نسبتين على بعضهما بالطريقة التى اتبعت فى قسمة الكسور
مثلا $\frac{٣}{٤} : \frac{٥}{٨} = ١\frac{١}{٥}$

تمـــرين

(٧١٢) قطعتان من القماش طول احداهما ٢١ مترا وطول الثانية ٧ أمتار فما نسبة الاولى للثانية وما نسبة الثانية للاولى

(٧١٣) فرقتان من العسكر احداهما تحتوى على ١٢٥٠٠ عسكرى والثانيه تحتوى على ٢٥٠٠٠ عسكرى فما نسبة الاولى للثانية

(٧١٤) مدرستان باحداهما ١٢٠ تلميذا وبالثانية ١٤٤ فما النسبة بين عدد تلامذة الاولى والثانية

(٧١٥) تلميذ حصـــل على درجة ١٧ وكانت أعلى درجة للاجابة ٢٠ وتلميذ آخر حصل على درجة ٢٥ وكانت أعلى درجة للاجابة ٣٠ فأى التلميذين أرقى درجة

(٧١٦) ساع ملزم بقطع ٤٥ كيلو متر فقطع من ذلك ١٨ كيلو متر فما النسبة بين ماقطعه وطول الطريق

(٧١٧) شخص يصرف ١٤٤ جنيها من ايراده السنوى البالغ قدره ١٨٠ جنيها فما نسبة مصروفه الى ايراده

(٧١٨) فلاح زرع ١٢ فدانا قطنا من أطيانه التى قدرها ٣٦ فدانا فما نســبة المنزرع قطنا الى جميع أطيانه

(٧١٩) اذا طالعت ٥٠ صحيفة من كتاب به ٧٠ صحيفة فما نسبة ماطالعته الى كل الكتاب

(٧٢٠) قرية كان بها ٨٠٠٠ نفس وبعد ١٠ سنوات بلغ تعدادها ١٠٠٠٠ نفس فما نسبة الزيادة الى أصل التعداد

(٧٢١) ما نســبة ١٥ دقيقة للساعة وما نســبة ٣٠ دقيقة ثم ٤٠ دقيقة ثم ٤٥ دقيقة لها

التناسب

٣٣٢ ـ التناسب هو اجتماع نسبتين متساويتين[1]

فاذا كانت النسبة بين ١٥ , ٥ تساوى للنسبة بين ٢١ , ٧ فيتألف من هاتين النسبتين تناسب يكتب $\frac{15}{5} = \frac{21}{7}$ أو يكتب ١٥ : ٥ :: ٢١ : ٧

وينطق به هكذا نسبة ١٥ الى ٥ كنسبة ٢١ الى ٧

الحدّ الاول ١٥ والرابع ٧ يسميان الطرفين والثانى ٥ والثالث ٢١ يسميان الوسطين والحدّ الاول ١٥ والثالث ٢١ يسميان المقدمين والحد الثانى ٥ والرابع ٧ يسميان التاليين والحدّان ١٥ , ٥ يسميان حدّى النسبة الاولى والحدّان ٢١ , ٧ يسميان حدّى النسبة الثانية والحدّ ٧ يسمى الرابع المتناسب للثلاثة الحدود الاخرى

٣٣٣ ـ اذا كان الوسطان متساويين كما فى التناسب

٣٦ : ١٨ :: ١٨ : ٩ يقال للحدّ ١٨ الوسط المتناسب الهندسى للعددين ٣٦ , ٩

ويمكن أن يكتب التناسب بالاختصار فى هذه الحالة هكذا ∺ ٣٦ : ١٨ : ٩

ويقرأ نسبة ٣٦ الى ١٨ كنسبة ١٨ الى ٩ أو نسبة ٣٦ الى ١٨ الى ٩

(١) اذا كانت النسبتان المتساويتان عدديتين يكون التناسب عدديا واذا كانتا هندسيتين فالتناسب هندسى ولم نتكلم على التناسب العددى لعدم استعماله

فالوسط المتناسب الهندسى بين عددين هو عدد ثالث يتكون منه وسطا تناسب والعددان المذكوران يكونان طرفين له

وفى هذا التناسب يقال للعدد ٩ الثالث المتناسب للعددين ٣٦ و ١٨ فالثالث المتناسب هو الحدّ الرابع من تناسب وسطاه متساويان

٣٣٤ ـ اذا وجدت نسـبة مشتركة فى تناسبين يمكن حذفها ويتركب من النسبتين الاخريين تناسب

فاذا كان ١٥ : ٥ :: ١٢ : ٤ و

١٥ : ٥ :: ١٨ : ٦ يكون ١٢ : ٤ :: ١٨ : ٦

وذلك لانه حيث كان كل من النسبتين $\frac{١٢}{٤}$ و $\frac{١٨}{٦}$ مساوية للنسبة $\frac{١٥}{٥}$ فيكونان متساويتين ومنهما يتركب التناسب ١٢ : ٤ :: ١٨ : ٦

خواص التناسب

٣٣٥ ـ نظرية (١) ـ كل تنـاسب حاصل ضرب طرفيـه يساوى حاصل ضرب وسطيه

ففى التناسب $\frac{١٢}{٨} = \frac{٦}{٤}$ يكون ١٢ × ٤ = ٨ × ٦

البرهـان حيث ان $\frac{١٢}{٨} = \frac{٦}{٤}$ فاذا ضرب حدّا النســبة الاولى فى ٤ وحدّا الثانيـة فى ٨ فانـ النسبتين لاتتغيران ويكون

$$\frac{١٢ \times ٤}{٨ \times ٤} = \frac{٦ \times ٨}{٤ \times ٨}$$

وحيث ان هـذين الكسرين متسـاويان ومقاماهما متحدان فيلزم تساوى بسطيهما ويكون ١٢ × ٤ = ٦ × ٨ وهو المطلوب

نتيجة (١) بواسطة هذه النظرية يمكن ايجاد أحد حدود التناسب بعد معرفة الحدود الثلاثة الاخرى

فاذا كانت الحدود الثلاثة الاول من تناسب هى ١٢ و ٨ و ٦ ورمز للحدّ الرابع بحرف س يحصل $\frac{١٢}{٨} = \frac{٦}{س}$ وبناء على ماتقدم فى النظرية يكون ١٢ × س = ٨ × ٦ واذا قسم طرفا هذه المتساوية على ١٢ يحدث س = $\frac{٨ \times ٦}{١٢}$ = ٤

أعنى أن الحدّ الرابع من التناسب يساوى حاصل ضرب الوسطين مقسوما على الحدّ الاول وبمثل ذلك يمكن أن يستنتج أن الحدّ الاول يساوى حاصل ضرب الوسطين مقسوما على الحدّ الرابع

وأما اذا كان المجهول أحد الوسطين فيستنتج بطريقة مشابهة لذلك وينتج انه يساوى حاصل ضرب الطرفين مقسوما على الوسط المعلوم

نتيجة (٢) اذا كان الحدّ المجهول هو الوسط المتناسب بين عددين مثل ٤ و ٩ يرمز له بحرف س ويحدث $\frac{٤}{س} = \frac{س}{٩}$ وبموجب النظرية السابقة يكون ٤ × ٩ = $س^٢$ وبأخذ جذر الطرفين يحدث $\sqrt{٤ \times ٩}$ = س أى أن س = $\sqrt{٣٦}$ = ٦

أعنى أن الوسط المتناسب بين عددين يساوى الجذر التربيعى لحاصل ضربهما

٣٣٦ ـ نظرية (٢) بالعكس ـ اذا ساوى حاصل ضرب عددين حاصل ضرب عددين آخرين يتألف من الأعداد الاربعة

تناسب طرفاه عاملا أحد الحـاصلين ووسطاه عاملا الحاصل الثـانى فاذا كان ٣ × ٨ = ٤ × ٦ يتركب من هذه الاعداد تناسب هكذا

٣ : ٤ :: ٦ : ٨

البرهان ــ حيث ان ٣ × ٨ = ٤ × ٦ فاذا قسم طرفا هــذه المتساوية على حاصل ضرب ٤ × ٨ ينتج = $\frac{٣ \times ٨}{٤ \times ٨} = \frac{٤ \times ٦}{٤ \times ٨}$ وبحذف المشترك فى البسط والمقام ينتج $\frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٨}$ وهو المطلوب

نتيجة (١) اذا جعلنا عاملى الحاصل ٣ × ٨ طرفين فلنا أن نجعل الطرف الاول ٣ أو ٨ فهــاتان صورتان وفى كل منهما لنـا أن نجعل الوسط الاول ٤ أو ٦ فيحصل أربع صور وكذا يحصــل أربع صور مثلها اذا جعل عاملا الحاصل ٤ × ٦ طرفين فحينئذ يمكن أن يوضع التناسب فى ثمان صور وهى

٣ : ٤ :: ٦ : ٨	٤ : ٣ :: ٨ : ٦
٣ : ٦ :: ٤ : ٨	٤ : ٨ :: ٣ : ٦
٨ : ٤ :: ٦ : ٣	٦ : ٣ :: ٨ : ٤
٨ : ٦ :: ٤ : ٣	٦ : ٨ :: ٣ : ٤

فالتناسبات الاربع الاول تفيد أن التناسب لايتغير اذا غير فيه أحد الوسطين بالآخر أو أحد الطرفين بالآخر

والتناســبات الاربع الآخر تفيد أن التناسب لايتغير اذا جعل فيه الطرفان محل الوسطين وبالعكس .

نتيجة (٢) اذا تساوت المقدمات المتناظرة فى تناسبين يتركب من التوالى تنـاسب

فاذا كان ١٨ : ٦ :: ١٢ : ٤ و
١٨ : ٣ :: ١٢ : ٢ يتركب من التوالى
تناسب وهو ٦ : ٤ :: ٣ : ٢

وذلك لانه اذا غير أحد الوسطين بالآخر فى كلا التناسبين يحدث

١٨ : ١٢ :: ٦ : ٤ و
١٨ : ١٢ :: ٣ : ٢ ولوجود النسبة المشتركة فى هذين التناسبين يحدث ٦ : ٤ :: ٣ : ٢

نتيجة (٣) اذا تساوت التوالى المتناظرة فى تناسبين يتركب من المقدمات تناسب

فاذا كان ٢٠ : ٥ :: ١٦ : ٤ و
١٥ : ٥ :: ١٢ : ٤ يتركب من المقـدمات
تناسب وهو ٢٠ : ١٦ :: ١٥ : ١٢

وذلك لأنه اذا غير أحد الوسطين بالآخر فى كلا التناسبين يحدث تناسبان بينهما نسبة مشـتركة وبحذفها يتركب من النسبتين الاخريين التناسب المطلوب

٣٣٧ ـ نظرية (٣) اذا ضربت حدود عدّة تناسبات فى بعضها بالترتيب يحدث من الحواصل الاربعة تناسب

فاذا كان $\frac{٥}{٦} = \frac{١٠}{١٢}$, $\frac{٢}{٣} = \frac{١٤}{٢١}$, $\frac{٧}{٨} = \frac{٣٥}{٤٠}$ وضربت الحدود المتناظرة فى بعضها يحدث

$$\frac{٥ \times ٢ \times ٧}{٦ \times ٣ \times ٨} = \frac{١٠ \times ١٤ \times ٣٥}{١٢ \times ٢١ \times ٤٠}$$

البرهان ـ اذا ضربت المتساويات الاصلية فى بعضها طرفا بطرف فالحاصلان يكونان متساويين

اى $\frac{٥}{٦} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٧}{٨} = \frac{١٠}{١٢} \times \frac{١٤}{٢١} \times \frac{٣٥}{٤٠}$

أو $\frac{٥ \times ٢ \times ٧}{٦ \times ٣ \times ٨} = \frac{١٠ \times ١٤ \times ٣٥}{١٢ \times ٢١ \times ٤٠}$ وهو المطلوب

نتيجة ـ يمكن رفع حدود التنـاسب الى درجة واحدة والقوى الناتجة تكون متناسبة

فاذا كان ٢ : ٣ :: ٤ : ٦ يكون $٢^٣ : ٣^٣ :: ٤^٣ : ٦^٣$

أى ٨ : ٢٧ :: ٦٤ : ٢١٦

وذلك لانه اذا كتب التناسب المفـروض ثلاث مرات وضربت الحدود المتناظرة فى بعضها فانه ينتج التناسب الثانى

ملحوظة ـ يســتدل على تناسب القوى الاخرى بكتابة التناسب مرّات بقــدر درجة القوّة المرفوع اليها حدود التناسب

٣٣٨ ـ نظرية (٤) الكميات المتناســبة جذورهــا المتشابهة متناسبة

فاذا كان ٨١ : ٩ :: ٣٦ : ٤ يكون

$\sqrt{٨١} : \sqrt{٩} :: \sqrt{٣٦} : \sqrt{٤}$

وذلك لان التناسب المفروض يمكن وضعه هكذا

$\frac{٨١}{٩} = \frac{٣٦}{٤}$ وبأخذ جذر الطرفين لايزال التسـاوى باقيا ويحدث

$\sqrt{\frac{٨١}{٩}} = \sqrt{\frac{٣٦}{٤}}$ أو $\frac{\sqrt{٨١}}{\sqrt{٩}} = \frac{\sqrt{٣٦}}{\sqrt{٤}}$ وهو المطلوب

٣٣٩ ـ نظرية (٥) نسـبة مجموع الحدّين الاولين الى الثـانى كنسبة مجموع الحدين الاخيرين الى الرابع

مثلا فى تناسب $\frac{١٥}{٥} = \frac{١٢}{٤}$ يكون $\frac{١٥+٥}{٥} = \frac{١٢+٤}{٤}$

البرهان ـ حيث ان $\frac{١٥}{٥} = \frac{١٢}{٤}$ فاذا أضيف الى طرفى هذه المتساوية واحد صحيح فان التساوى لا يزال باقيـا أعنى $\frac{١٥}{٥} + ١ = \frac{١٢}{٤} + ١$ ثم نحوّل الواحد فى كل من الطرفين الى كسر لفظى من جنس المقام فيحدث $\frac{١٥}{٥} + \frac{٥}{٥} = \frac{١٢}{٤} + \frac{٤}{٤}$ أو $\frac{١٥+٥}{٥} = \frac{١٢+٤}{٤}$ وهو المطلوب

تنبيه ـ يمكن أن يقال ان نسبة مجموع الحدّين الأولين الى الاول كنسـبة مجموع الحدّين الآخرين الى الثـالث

وذلك لانه يمكن جعـل الطرفين وسـطين والوسـطين طرفين فى التناسب المفروض وتطبق النظرية المذكورة على التناسب الجديد

٣٤٠ ـ نظرية (٦) نسبة فاضل الحدّين الأولين الى الثـانى كنسبة فاضل الحدّين الآخرين الى الرابع

مثلا فى تناسب $\frac{١٥}{٥} = \frac{١٢}{٤}$ يكون $\frac{١٥-٥}{٥} = \frac{١٢-٤}{٤}$

البرهان ـ يبرهن على هذه النظرية بمثل ما برهن على نظرية (٥) غير أنه يطرح واحد من الطرفين عوضا عن جمعه

٣٤١ ـ نظرية (٧) نسـبة مجموع الحدّين الاولين الى مجموع الحدّين الآخرين كنسبة الحدّ الثانى الى الرابع أو الأول الى الثالث

مثـــلا فى تنـاسب $\frac{١٥}{٥} = \frac{١٢}{٤}$ يكون $\frac{١٥+٥}{١٢+٤} = \frac{٥}{٤}$ أو $\frac{١٥}{١٢}$

البرهان ـ تنـاسب $\frac{١٥}{٥} = \frac{١٢}{٤}$ يفيد بموجب نظرية (٥) أن

$\frac{١٥+٥}{٥} = \frac{١٢+٤}{٤}$ وبتغير موضع الوسطين يحدث

$\frac{١٥+٥}{١٢+٤} = \frac{٥}{٤}$ وهو المطلوب الأول

واذا قورن هذا التنـاسب بالتنـاسب المفروض بعـد تغير موضع الوسطين فيه يحدث $\frac{١٥+٥}{١٢+٤} = \frac{١٥}{١٢}$ وهو المطلوب الثانى

٣٤٢ ـ نظرية (٨) نسـبة فاضل الحدّين الاولين الى فاضل الحدّين الآخرين كنسبة الحدّ الثانى الى الرابع أو الاول الى الثالث

مثـــلا فى تنـاسب $\frac{١٥}{٥} = \frac{١٢}{٤}$ يكون $\frac{١٥-٥}{١٢-٤} = \frac{٥}{٤}$ أو $\frac{١٥}{١٢}$

ويبرهن على هـذه النظرية كما برهن على النظرية السابقة غير أنه يطبق على التناسب المفروض نظرية (٦) عوضا عن نظرية (٥)

٣٤٣ ـ نتيجة ـ نسبة مجموع الحدّين الأولين الى مجموع الحدّين الآخرين كنسبة فاضل الحدّين الاولين الى فاضل الحدّين الآخرين

مثلا فى تناسب $\frac{١٥}{٥} = \frac{١٢}{٤}$ يكون $\frac{١٥+٥}{١٢+٤} = \frac{١٥-٥}{١٢-٤}$

البرهان ــ لان تناسب $\frac{١٥}{٥} = \frac{١٢}{٤}$ يفيد بموجب نظرية (٧) أن
$\frac{١٥+٥}{١٢+٤} = \frac{٥}{٤}$ ويفيد بموجب نظرية (٨) أن
$\frac{١٥-٥}{١٢-٤} = \frac{٥}{٤}$ وبحذف النسبة المشتركة بين هذين التناسبين يحدث
$\frac{١٥+٥}{١٢+٤} = \frac{١٥-٥}{١٢-٤}$ وهو المطلوب

٣٤٤ ــ نظرية (٩) نسبة مجموع المقدّمين الى مجموع التاليين كنسبة أحد المقدّمين الى تاليه

مثلا فى تناسب $\frac{٢٥}{٥} = \frac{٣٥}{٧}$ يكون $\frac{٢٥+٣٥}{٥+٧} = \frac{٢٥}{٥}$ أو كنسبة $\frac{٣٥}{٧}$

البرهان ــ نغير أحد الوسطين بالآخر فى التناسب المفروض فيحدث
$\frac{٢٥}{٣٥} = \frac{٥}{٧}$ وهذا التناسب يفيد بموجب نظرية (٧) أن
$\frac{٢٥+٣٥}{٥+٧} = \frac{٢٥}{٥}$ أو $\frac{٣٥}{٧}$ وهو المطلوب

٣٤٥ ــ نظرية (١٠) نسبة فاضل المقدمين الى فاضل التاليين كنسبة أحد المقدّمين الى تاليه

مثلا فى تناسب $\frac{٤٨}{٦} = \frac{١٦}{٢}$ يكون $\frac{٤٨-١٦}{٦-٢} = \frac{٤٨}{٦}$ أو كنسبة $\frac{١٦}{٢}$

البرهان ــ نغير أحد الوسطين بالآخر فى التناسب المفروض فيحدث
$\frac{٤٨}{١٦} = \frac{٦}{٢}$ وهذا التناسب يفيد بموجب نظرية (٨) أن
$\frac{٤٨-١٦}{٦-٢} = \frac{٤٨}{٦}$ أو $\frac{١٦}{٢}$ وهو المطلوب

نتيجة ــ ينتج من هذه النظرية والنظرية السابقة أن نسبة مجموع المقدّمين الى مجموع التاليين كنسبة فاضل المقدّمين الى فاضل التاليين

مثلا فى تناسب $\frac{٤٨}{٦} = \frac{١٦}{٢}$ يكون $\frac{٤٨+١٦}{٦+٢} = \frac{٤٨-١٦}{٦-٢}$

البرهان ـ لان التناسب المفروض يفيـد بموجب نظرية (٩) ان
$\frac{١٦+٤٨}{٢+٦} = \frac{١٦}{٢}$ ويفيد أيضا بموجب نظرية (١٠) أن
$\frac{١٦-٤٨}{٢-٦} = \frac{١٦}{٢}$ وبحذف النسـبة المشـتركة من هذين التناسبين ينتج
$\frac{١٦+٤٨}{٢+٦} = \frac{١٦-٤٨}{٢-٦}$ وهو المطلوب

٣٤٦ ـ اذا وجدت جملة نسب متساوية فيكون نسبة مجموع المقدمات الى مجموع التوالى كنسبة أى مقدم الى تاليه

فاذا كان $\frac{١٨}{٢٧} = \frac{١٦}{٢٤} = \frac{١٤}{٢١} = \frac{٤}{٦}$ يكون $\frac{٤+١٤+١٦+١٨}{٦+٢١+٢٤+٢٧} = \frac{٤}{٦}$

البرهان ـ حيث ان كل واحدة من هـذه النسب تسـاوى $\frac{٢}{٣}$ أعنى أن

$\frac{١٨}{٢٧} = \frac{٢}{٣}$ و $\frac{١٦}{٢٤} = \frac{٢}{٣}$ و $\frac{١٤}{٢١} = \frac{٢}{٣}$ و $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ فمن ذلك

يؤخذ أن

$$١٨ = ٢٧ \times \frac{٢}{٣} \quad \text{و}$$
$$١٦ = ٢٤ \times \frac{٢}{٣} \quad \text{و}$$
$$١٤ = ٢١ \times \frac{٢}{٣} \quad \text{و}$$
$$٤ = ٦ \times \frac{٢}{٣}$$

وبجمع هذه المتساويات على بعضها يحدث

$$١٨ + ١٦ + ١٤ + ٤ = \frac{٢}{٣} (٢٧ + ٢٤ + ٢١ + ٦)$$

وبقسمة الطرفين على معـامل $\frac{٢}{٣}$ يحدث $\frac{٤+١٤+١٦+١٨}{٦+٢١+٢٤+٢٧} = \frac{٢}{٣}$

وحيث ان كل نسـبة من النسب المفروضة = $\frac{٢}{٣}$ فيمكن أن يعوض $\frac{٢}{٣}$ باحدها وليكن $\frac{٤}{٦}$ ويحدث

$$\frac{٤+١٤+١٦+١٨}{٦+٢١+٢٤+٢٧} = \frac{٤}{٦}$$

تمـــــرين

(٧٢٢) مامقدارالحد المجهول من التناسب ٥ : ٦ :: س : ٤

(٧٢٣) » » » » س : ٦ :: $\frac{٥}{٨}$: ٢

(٧٢٤) » الرابع المتناسب للاعداد $\frac{٥}{٧}$ و $\frac{٣}{٤}$ و $\frac{٢}{٥}$

(٧٢٥) » الثالث المتناسب لعددى ٤ و ١٢.

(٧٢٦) » » » » ٧ و $\frac{١}{٣}$

(٧٢٧) » الوسط المتناسب بين عددى ١٤٤ و ٤

(٧٢٨) » » » » » $\frac{١}{٤}$ و $\frac{١}{٩}$

(٧٢٩) كيف تستنتج التناسب ١٢ : ٦ :: ١٠ : ٥ من التناسب

٥ : ١٠ :: ٦ : ١٢

(٧٣٠) ابحث عن مقام الكسر $\frac{٢٥}{}$ المكافئ لكسر $\frac{١٠٠}{١٤٠}$

(٧٣١) غيط مستطيل الشكل طوله ٢٥ مترا وعرضه ٨ متر مامقدار عرض غيط آخر مستطيل الشكل طوله ٢٠ مترا ومكافئ للاول فى المساحة .

المقادير المتناسبة طرديا

٣٤٧ ـ تمهيد ـ يوجد كميات متعلقة ببعضها بحيث اذا كبرت احداها عما كانت عليه مرتين أو أكثر تكبر الكمية الأخرى كذلك واذا صغرت احداها عما كانت عليه مرتين أو أكثر تصغر الكمية الثانية تبعا لها

مثلا اذا كان ثمن الذراع من الجوخ ٣٥ قرشا فثمن ذراعين يكون ٧٠ قرشا وثمن ٣ أذرع يكون ١٠٥ قروش وثمن ١٠ أذرع يكون ٣٥٠

قرشا وثمن نصف ذراع هو ١٧,٥ قرشا وثمن ربع ذراع هو ٨,٧٥ قروش وهكذا

فيرى أنه كلما كبرت كميــة الجوخ تكبر كميــة الثمن تبعا لهــا وكلما صغرت كميــة الجوخ تصغر كمية الثمن فكميتا الجوخ والثمن متعلقتان ببعضهما (هذا مع ملاحظة اتحاد نوع الجوخ)

وكذا اذا اشتغل ١٠ من العمال ٣٠ مترا من عمل فبالضرورة يشتغل ٢٠ عاملا ٦٠ مترا ويشــتغل ٤٠ عاملا ١٢٠ مترا ويشــتغل ٥ عمال ١٥ مترا ويشتغل عاملان ٦ أمتار وهكذا

فيرى أنه كلما كبرت كميــة العمال تكبر كميــة الشغل تبعا لهــا وكلما صغرت كمية العمال تصغر كمية الشغل تبعا لها (هذا مع ملاحظة توحيد الزمن وقوة العمال وصعوبة العمل)

وتوجد ارتباطات شتى بين جملة كميات من هــذا القبيل فى العلوم والصنائع كالارتباط بين المسافة والزمن والارتباط بين كمية المؤنة والاشخاص اللازمة لهم والارتباط بين طول محيط الدائرة وقطرها أو بينــــه وبين نصف قطرها

٣٤٨ ــ اذا أخذ مقداران من احدى الكميتين المتعلقتين ببعضهما والمقداران المقابلان لهما من الكمية الأخرى كانت النســبة بين مقدارى الكمية الأولى عين النسبة بين مقدارى الكمية الثانية

ففى المثال الأول ــ اذا أخذ من كميــة الجوخ المقــداران ٣ أذرع و ١٠ أذرع والمقــداران المقابلان لها من كمية الثمن وهما ١٠٥ قروش و ٣٥٠ قرشا فان النسبة بين مقدارى كمية الجوخ تكون $\frac{٣}{١٠}$ والنســبة بين المقدارين المقابلين لها من الثمن هى $\frac{١٠٥}{٣٥٠}$ و باختزالهــا ينتج $\frac{٣}{١٠}$

وفى المثال الثانى ـ اذا أخذ من كمية العمال ٢٠ عاملا و ٥ عمال ومن كمية العمل المقداران المقابلان لها وهما ٦٠ مترا و ١٥ مترا فان النسبة بين العمال تكون $\frac{٢٠}{٥}$ أى ٤ والنسبة بين الامتار هى $\frac{٦٠}{١٥}$ أى ٤ أيضا

ومما ذكر يستنتج التعريف الآتى

٣٤٩ ـ تعريف ـ الكميتان المتناسبتان طرديا هما اللتان تكون النسبة بين مقدارين من احداهما كالنسبة بين المقدارين المقابلين لهما من الثانية

المقادير المتناسبة عكسيا

٣٥٠ ـ تمهيد ـ يوجد كميات متعلقة ببعضها بحيث اذا كبرت احداها عما كانت عليه مرتين أو أكثر تصغر الكمية المقابلة لها كذلك مرتين أو أكثر واذا صغرت احداها عما كانت عليه مرتين أو أكثر تكبر الأخرى كذلك مرتين أو أكثر

مثلا اذا أتم ١٢ عاملا بناء حائط فى ٢٠ يوما فان ٤٨ عاملا يتمون مثله فى ٥ أيام ويتم ٦ عمال حائطا مثله فى ٤٠ يوما وهكذا

فيرى أنه كلما كبرت كمية العمال يصغر مقدار الزمن وكلما صغرت كمية العمال يكبر مقدار الزمن

وكذا اذا لزم لفرش حجرة ١٨ مترا من بساط عرضه ١٢٠ سنتيمتر فيلزم ٣٦ مترا لفرش تلك الحجرة من بساط عرضه ٦٠ سنتيمتر ويلزم ١٢ مترا فقط مما عرضه ١٨٠ سنتيمتر وهكذا

فيرى أنه كلما كبر عرض البساط لزم تصغير مقدار الطول وكلما صغر العرض لزم تكبير مقدار الطول

وتوجد ارتباطات شتى بين جملة كميات من هـــذا القبيل فى العلوم والصنائع كالارتباط بين السرعة والزمن فى قطع مسافة معينة والارتباط بين عدد الاشخاص الذين ياكلون مؤنة معينة ومقدار زمن أكل تلك المؤنة

٣٥١ ـ اذا أخذ مقـداران من احدى الكميتين المرتبطتين ببعضهما والمقداران المقابلان لهما من الكمية الثانية كانت النسبة بين مقدارى الكمية الاولى تساوى النسبة العكسية لمقدارى النسبة الثانية

ففى المثال الاول ـ اذا أخذ من كميـة العمال المقداران ١٢ و٤٨ والمقداران المقابلان لهما وهما ٢٠ يوما و ٥ أيام فان النسبة بين مقدارى العمال تكون $\frac{١٢}{٤٨}$ أى $\frac{١}{٤}$ والنسـبة بين مقدارى الايام هى $\frac{٢٠}{٥}$ أى ٤ وعكس هذه النسبة هى $\frac{٥}{٢٠}$ أى $\frac{١}{٤}$ أيضا

وفى المثال الثانى ـ اذا أخذ من كميـة الطول ١٨ مترا و ٣٦ مترا والمقداران المقابلان لهما من كمية العرض وهما ١٢٠ سـنتيمتر و ٦٠ سنتيمتر فان النسبة بين مقدارى الطول هى $\frac{١٨}{٣٦}$ أى $\frac{١}{٢}$ والنسبة بين مقدارى العرض هى $\frac{١٢٠}{٦٠}$ وعكس هذه النسبة هى $\frac{٦٠}{١٢٠}$ أى $\frac{١}{٢}$ أيضا

ومن هنا يستنتج التعريف الآتى

٣٥٢ ـ تعريف ـ الكميتان المتناسبتان عكسـيا هما اللتـان تكون النسبة بين أىّ مقدارين من احداهما هى عكس النســبة بين المقدارين المقابلين لهما من الكمية الثانية

٣٥٣ ـ وكما يحصل هذا الارتباط بين نوعين من الكميات كذلك يحصل بين ثلاثة أنواع منها فأكثر

مثال ذلك الارتباط الذي يحصل بين كمية العمال وكمية العمل ومقدار الزمن فانه كلما كبرت كمية العمال تكبر كمية العمل تبعا لها وكلما كبرت كمية الزمن تكبر كميـة العمل تبعا لها فكمية العمل تتأثر من جهة العمال تارة ومن جهة الزمن تارة أخرى

وكالارتباط بين مصاريف بناء حائط وابعاده مثلا فانها تتعلق بطول الحائط من جهة وبعرضه من جهة أخرى وبسمكه من جهة ثالثة

وكالارتباط الذي يحصـل بين ربح التجارة ومقدار رأس المـال ومدة استعمال المبلغ في التجارة فان الربح يكبر بكبر رأس المـال ويصغر بصغره وكذا يكبر ويصغر تبعا لكبر المدّة وصغرها

ولكن لا يمكن أن يحكم على مثل هـذه الارتباطات انها مطردة أو منعكسة فقد يكون تعلق الكمية ببعض الكميات مطردا وبالبعض منعكسا

مثال ذلك ــ الارتباط الذي يحصـل بين كمية الزمن وكمية العمل ومقدار العمال فان كمية الزمن تكبر بكبر العمل وتصـغر بصغره ولكنها تكبر بصغر مقدار العمال وتصغر بكبر مقدارها

القاعدة الثلاثية

٣٥٤ ـ القاعدة الثلاثية هي مسئلة تتركب من مقادير متقابلة من كميات متناسبة وهذه المقادير تكون متحدة النوع مثنى أحدها مجهول بحيث كلما تغير أحد هذه المقادير يتغير المقدار المناظر له

٣٥٥ ـ المقـادير المتقابلة المعلومة وهي التي توضـع لتأسيس المسئلة تسمى بالاصول والمقادير المنـاظرة لها المشـتملة على المجهول تسمى المتعلقات

٣٥٦ ـ اذا تركبت مسئلة القاعدة الثلاثيـــة من أربعة مقادير أحدها مجهول سميت قاعدة ثلاثية بسيطة واذا تركبت من أكثر من ذلك سميت قاعدة ثلاثية مركبة

حل مسائل القـاعدة الثلاثية البسيطة

٣٥٧ ـ لحل مسئلة من مسائل القاعدة الثلاثية البسيطة يقال حيث إنها مركبة من أربعة مقادير متحدة النوع مثنى ومتناسـبة مع بعضها طرديا أو عكسيا فيمكن أن يتركب من هـذه المقادير تناسب يكون أحد حدوده هو المقدار المجهول فيمكن استخراجه

ولنوضح ذلك بحل المسائل الآتية

المسئلة الاولى ـ اذا كان ثمن ١٦ مترا من الحرير ٤٠٠ قرش فما ثمن ٢٥ مترا منه

ولحلها نرمز لمقدار المجهول بحرف س ثم توضع هكذا

مـتر	ص
١٦	٤٠٠
٢٥	س

ثم يقال حيث ان كمية الامتار تتناسب طرديا مع أثمانهـا فيحدث هذا التناسب ١٦ : ٢٥ :: ٤٠٠ : س ومنه س $= \frac{٤٠٠ \times ٢٥}{١٦} =$ ٦٢٥ ص

المسئلة الثانية ـ اذا أتم ٣٦ صانعا عملا فى ١٥ يوما ففى كم يوم يمكن تتميم مثله اذا اشتغل ٢٠ عاملا

الحل ـ نرمز لعدد الايام المجهولة بحرف س وتوضع هكذا

يوما	صانعا
١٥	٣٦
س	٢٠

ثم يقال حيث ان عدد العمال يتناسب مع أيام الشغل عكسيا اذ كلما كبر عدد العمال صغر مقدار الزمن فيتركب هذا التناسب

$$٣٦ : ٢٠ :: س : ١٥ \text{ ومنه } س = \frac{٣٦\times١٥}{٢٠} = ٢٧ \text{ يوما}$$

تنبيه ـ اذا كانت الكميتان المركبة منهما المسئلة تتناسبان طرديا يقال ان مسئلة القاعدة الثلاثية مطردة وان كانتا تتناسبان عكسيا يقال انها منعكسة

فالمسئلة الاولى المتقدمة مطردة والمسئلة الثانية منعكسة

حل مسائل القاعدة الثلاثية البسيطة بطريق الوحدة

٣٥٨ ـ لحل مسئلة من مسائل القاعدة الثلاثية البسيطة بطريق التحويل الى الوحدة نبحث عما يؤل اليه مقدار الكمية التى من نوع المجهول اذا فرض أن المقدار المقابل له من الكمية الاخرى مساو للواحد ثم نستنبط من ذلك مقدار المجهول

ولنوضح ذلك بحل المسئلتين الآتيتين

المسئلة الاولى ـ ساع يقطع ١٦ ملقة فى ١٠ ساعات فكم ملقة يقطعها فى ١٨ ساعة

الحل ـ نرمز لعدد الملقات بحرف س ثم توضع هكذا

ملقه	ساعه
١٦	١٠
س	١٨
$\frac{١٦}{١٠}$	١
$\frac{١٦ \times ١٨}{١٠}$	١٨
٢٨,٨	١٨

وكيفية ذلك أن يقـال حيث ان الساعى يقطع فى ١٠ سـاعات ١٦ ملقـة فيقطع فى ساعة واحدة مقدارا أقل من ١٦ ملقة ١٠ مرات أى $\frac{١٦}{١٠}$ ويقطع فى ١٨ ساعة مقدارا أكبر من ذلك ثمان عشرة مرة أى $\frac{١٦ \times ١٨}{١٠}$ أى ٢٨,٨ ملقة

المسئلة الثانية ـ قلعة بها ٨٠٠ عسكرى وعندهم مؤنة تكفى ٤ أشهر ثم زاد عليهم ٢٠٠ عسكرى فكم شهرا تكفى هذه المؤونة للجميع

الحل ـ يلاحظ أولا أن عدد العساكر صار ٨٠٠ + ٢٠٠ أى ١٠٠٠ ثم نرمز لعدد الاشهر المجهولة بحرف س وتوضع هكذا

عسكرى	شهر
٨٠٠	٤
١٠٠٠	س
١	٨٠٠×٤
١٠٠٠	$\frac{٨٠٠ \times ٤}{١٠٠٠}$
١٠٠٠	$\frac{٣٢٠٠}{١٠٠٠}$
١٠٠٠	٣,٢

وكيفية العمل أن يقال حيث ان المؤنة الموجودة تكفى ٨٠٠ عســكرى مدّة ٤ أشهر فتكفى عسكريا واحدا مدّة ٤ × ٨٠٠ شهر وتكفى ١٠٠٠ عسكرى مدّة أصغر من ذلك ١٠٠٠ مرة أى $\frac{٨٠٠ \times ٤}{١٠٠٠}$ أى $\frac{٣٢٠٠}{١٠٠٠}$ أى $\frac{٣٢}{١٠} = ٣\frac{١}{٥}$ شهر

أعنى أن المؤنة تكفى جميع العساكر $٣\frac{١}{٥}$ شهر

٣٥٩ ـ اذا تاملنا فى نتـائج حل المسائل الاربعـة المذكورة بنمرة ٣٥٧ و ٣٥٨ يمكن أن يستنتج منها القانون الآتى

مقدار المجهول في القاعدة الثلاثية البسيطة يساوى حاصل ضرب الكمية المناظرة له (التى من نوعه) فى كسر اعتيادى مؤلف من مقدارى الكمية الثانية ويكون بسط ذلك الكسر الكمية المتعلقة المعلومة اذا كان نوعه يتناسب مع نوع المجهول طرديا ويكون البسط المذكور الكمية الاصلية اذا كان نوعه يتناسب مع نوع المجهول عكسيا

مسائل على القاعدة الثلاثية البسيطة المطردة

(٧٣٢) اذا كان ثمن ٣٫٢٥ أذرع من الجوخ مبلغ ١١٧ قرش فما يكون ثمن ٤٫٥ أذرع منه

(٧٣٣) اذا كان ثمن ٣٦ رطلا من التفاح مبلغ ٤٢ قرش فكم رطلا منه تشترى بمبلغ ٢٨ قرش

(٧٣٤) ساع يقطع ١٢ كيلومتر فى ٤ ساعات فما عدد الكيلومترات التى يقطعها فى ١٣ ساعة

(٧٣٥) وابور الاكسبريس يقطع المسافة التى بين القاهرة والاسكندرية وقدرها ٢١٠ كيلومتر فى مدة ٣٫٥ ساعة فما مقدار الزمن الذى يصل فيه وابور آخر بالسرعة عينها اذا قام من القاهرة الى جرجا التى هى على بعد ٥٠٤٫٧٨٣ كيلومتر من القاهرة

(٧٣٦) اذا حفر ٢٨ صانعا ٣٥ مترا مكعبا فى اليوم فما عدد الامتار التى يمكن أن يحفرها ٣٠٠ صانع فى اليوم

(٧٣٧) اذا اشتغل ١٢ صانعا ١٥ مترا فى اليوم كم صانعا تلزم لعمل ٢٠٠ متر فى اليوم

(٧٣٨) صانع يكتسب فى ٢٠ يوما مبلغ ٢٥٠ قرشا فما مقدار ما يكتسبه اذا اشتغل زيادة عما اشتغل ٦ أيام

(٧٣٩) فاعل يكتسب ٢٥٫٥ قرشا فى ستة أيام فما عدد الايام التى يكتسب فيها ٨٠٫٧٥ قرشا

(٧٤٠) عصا طولها متران واذا وضعت رأسية على الارض يكون طول ظلها ٠٫٧٥ متر ومأذنة طول ظلها فى هذه اللحظة ٩ أمتار فما ارتفاعها

(٧٤١) طلمبة ترفع فى ١٠ دقائق ٣٤٥٢ لترا من الماء فما هو الزمن اللازم لان ترفع ٥٥ مترا مكعبا من الماء

(٧٤٢) فرسان فى سباق احداهما قطعت ٣ فراسخ فى ٣٢ دقيقة والثانية قطعت فرسخين ونصفا فى ٢٨ دقيقة أى الفرسين أسرع

(٧٤٣) اذا كان ربح ٢٠ كيلوجرام من بضاعة هو ٣ فرنك فما يكون ربح ٥٠ كيلوجرام منها

(٧٤٤) تاجر دفع مبلغ ٥١ مليما أجرة تحويل ١٧ جنيها مصريا بالبوستة فما مقدار ما يدفع على تحويل ٥٠ جنيها مصريا

(٧٤٥) تاجر دفع مبلغ ٨١ قرشا أجرة ١٨ أردب من القمح بالسكة الحديد فما عدد الارادب التى دفع عليها جنيه انجليزى ومعلوم أنه دفع منه ٣ قروش مصاريف أخرى

(٧٤٦) اذا كان ثمن ١٤٥ نعجة مبلغ ١٦٩ جنيه ٣ شلن ٤٠ بنس فما ثمن ٢٠ نعجة بالسعر عينه

مسائل على القاعدة الثلاثية البسيطة المنعكسة

(٧٤٧) ١٢ عاملا تمموا عملا فى ٢٥ يوما فكم صانعا يتممون مثله فى مدة ١٥ يوما

(٧٤٨) ثلاثة من العملة اشتغلوا عملا فى ١٥ ساعة فما عدد الساعات التى يمكن أن يتم فيها مثله بواسطة ٥ عملة

(٧٤٩) ١٣٠٠٠ شخص محصورون فى محل وعندهم مؤنة تكفيهم ١٠ شهور فكم رجلا يلزم اخراجهم من هذا المحل اذا علم ان مدة الاقامة تزيد أشهر

(٧٥٠) سفينة بها مؤنة ٢٠ يوما على حساب الشخص الواحد ١٨٤٠ جراما فما الذى يجب صرفه يوميا للشخص اذا علم أن السفينة تصل الميناء بعد ٣٠ يوما

(٧٥١) عسكرى ملزم أن يمشى مسافة فى مدة ١٠ أيام بحيث انه يمشى فى اليوم ١٠ ساعات فتأخر عن السفر يومين فما مقدار المسافة التى يلزم أن يمشيها يوميا ليصل فى الوقت المحدد

(٧٥٢) اذا لزم ٧٢ مترا من قماش عرضه ٥ر١ متر لعمل ٢٤ بدلة فكم مترا تؤخذ من قماش آخر عرضه ٢٠ر١ متر لعمل ٢٤ بدلة مثلها

(٧٥٣) اذا لزم ٨٤ لوحا من الخشب الذى عرضه ٣٠ر. متر لعمل أسقف أربع حجرات فما عدد الالواح التى يلزم أخذها من خشب آخر عرضه ٣٥ سنتيمتر لعمل أربع أسقف مثلها

(٧٥٤) عملان متفاوتان فى الصعوبة بأن كانت النسبة بينهما كالنسبة بين ٥ و ٧ فاذا اشتغل عامل ٢١ مترا من الاول فما عدد الامتار التى يمكنه أن يشتغلها من الثانى

(٧٥٥) ماعدد الامتار التى يلزم أخذها من قماش عرضه $\frac{٧}{٨}$ ذراع لعمل بطانة لثلاثين مترا من حرير عرضه $\frac{٣}{٤}$ ذراع .

(٧٥٦) وابور قوته ١٢ حصانا يروى غيطا فى ٤٨ ساعة فما عدد الساعات التى يروى فيها هذا الغيط بوابور آخر قوته ٢٠ حصانا

حل مسائل القاعدة الثلاثية المركبة

٣٦٠ ــ لحل أى مسئلة من مسائل القاعدة الثلاثية المركبة نضع المقادير المكونة منها أصول المسئلة على صف أفقى وبحذائها المقادير المكونة منها المتعلقات ونرمز للمجهول بحرف كحرف س مثلا

ثم نغير على التوالى كل مقدار من الاصول بالمقدار المنـاظر له من المتعلقات ونعتبر أن باقى المقادير ثابتة فيتولد عنـد كل تغير مسئلة من القاعدة الثلاثية البسيطة فنبحث عن مقدار مجهولها ونجعل الناتج على التوالى مقدارا مناظرا للمجهول ونستمر فى العمل حتى ينتهى تغير جميع المقادير فالناتج الاخير هو المطلوب

ولنوضح ذلك بحل المسئلة الآتية فنقول

مسئلة ــ ٤٠ عاملا يشتغلون فى اليوم ١٠ ساعات قد تمموا فى مدّة ١٥ يوما ٣٠٠ متر فما عدد الامتار التى يمكن أن يتممها ٢٠ عاملا يشتغلون فى اليوم ٩ ساعات مدّة ١٢ يوما

الحل ــ نضع المسئلة هكذا

	متر	يوم	ساعه	عامل
الاصول	٣٠٠	١٥	١٠	٤٠
المتعلقات	س	١٢	٩	٢٠

ثم نغير عدد العمال ٤٠ بالعـدد ٢٠ ونلاحظ أن باقى المقـادير التى فى الأصول ثابتة ونرمز للامتار التى تقابل ٢٠ عاملا بالرمز سَ فتحدث مسئلة من القاعدة الثلاثية البسيطة وهى اذا اشتغل ٤٠ عاملا مقدار ٣٠٠ متر فكم مترا يشتغلها ٢٠ عاملا وبحلها نجد أن سَ = $\frac{٣٠٠ \times ٢٠}{٤٠}$

ثم نعتبر أن هـذا المقدار هو الذى يحل محـل ٣٠٠ متر ونغير عدد الساعات ١٠ بالعدد ٩ ونلاحظ أن عدد العمال والايام ثابت ونرمز لما يحل محل الأمتار بالرمز سً فتحدث مسئلة من القاعدة الثلاثية البسيطة وهى اذا تم تشغيل $\frac{٣٠٠ \times ٢٠}{٤٠}$ مترا بحيث يكون الشغل فى اليوم ١٠ ساعات

فكم مترا يمكن تتميمها اذا كانت مدّة الشغل فى اليوم ٩ ساعات فقط وبحلها يحدث $\text{سَ} = \frac{٩\times٢٠\times٣٠٠}{١٠\times٤٠}$ ثم نغير عدد الايام ١٥ بالعدد ٢٠ ونلاحظ أن باقى المقادير ثابتة ونرمز للقدار الذى يحل محل الامتار بالحرف س فتحدث مسئلة من القاعدة الثلاثية البسيطة وهى اذا تم عمل $\frac{٩\times٢٠\times٣٠٠}{١٠\times٤٠}$ من الامتار فى مدّة ١٥ يوما فما عدد الامتار التى يمكن تتميمها فى ١٢ يوما وبحلها يحدث

$$\text{س} = \frac{١٢٩\times٢٠\times٣٠٠}{١٥\times١٠\times٤٠} = ١٠٨$$

٣٦١ ــ يمكن حل مسائل القاعدة الثلاثية المركبة بوضع آخر وهى أن تكتب مقادير الاصول وبحذائها مقادير المتعلقات ونغير على التوالى كل مقدار من الاصول بالمقدار المقابل له من المتعلقات ونرمز لما يؤل اليه المقدار المناظر للمجهول عند كل تغير بحروف مثل سَ وسً وسٌ , . . . س ويستنتج من كل وضعين متتالين تناسب ثم تضرب هذه التناسبات فى بعضها ونختصر الحدّين المشتملين على الحروف سَ سً الخ فيحدث تناسب أحد حدوده مجهول فيمكن استخراجه فيكون هو المطلوب

ولنوضح ذلك بحل المسئلة الآتية

مسئلة ــ ٢٤ فاعلا حفروا فى مدة ١٥ يوما بئرا عمقها ١٦ قدما وكانوا يشتغلون كل يوم ٨ ساعات فما عدد الساعات التى يجب أن يشتغل فيها يوميا ١٨ فاعلا مدة ٢٠ يوما لحفر بئر عمقها ٢٧ قدما

الحل ـ توضع المسئلة هكذا

	فاعل	يوما	قدما	ساعه
الاصول	٢٤	١٥	١٦	٨
المتعلقات	١٨	٢٠	٢٧	سـ

فاعل	يوما	قدما	ساعه
٢٤	١٥	١٦	٨
١٨	١٥	١٦	سـَ
١٨	٢٠	١٦	سـً
١٨	٢٠	٢٧	سـ

٢٤ : ١٨ :: سـَ : ٨ (١)

١٥ : ٢٠ :: سـً : سـَ (٢)

٢٧ : ١٦ :: سـ : سـً (٣)

وبضرب هذه التناسبات يحدث $\frac{٢٤ \times ١٥ \times ٢٧}{١٨ \times ٢٠ \times ١٦} = \frac{\text{سـَ} \times \text{سـً} \times \text{سـ}}{٨ \times \text{سـَ} \times \text{سـً}}$ أو

$\frac{٢٤ \times ١٥ \times ٢٧}{١٨ \times ٢٠ \times ١٦} = \frac{\text{سـ}}{٨}$ ومنه

$\text{سـ} = \frac{٨ \times ٢٤ \times ١٥ \times ٢٧}{١٨ \times ٢٠ \times ١٦} = ١٣{,}٥$

وكيفية ذلك أن يقال حيث ان ٢٤ عاملا حفروا فى مدة ١٥ يوما بئرا عمقها ١٦ قدما وكانوا يشتغلون فى اليوم ٨ ساعات فاذا أريد حفر مثلها بواسطة ١٨ عاملا فتكون ساعات الشغل اليومى مغايرة للسابقة فاذا رمز لهـا بحرف سـَ وقورن الوضعان المتتاليان ببعضهما يحدث التناسب ٢٤ : ١٨ :: سـَ : ٨ (١)

واذا غير عدد الايام ١٥ بالعدد ٢٠ وفرض ان باقى مقـادير الوضع الثانى ثابتـة فانه يلزم تغيير مقدار الساعات سـَ بمقـدار آخر يرمز له بحرف سـً وبمقارنة الوضع الثـالث بالثـانى يحدث هـذا التناسب ١٥ : ٢٠ :: سـً : سـَ (٢)

واذا غير العـدد الدال على العمق ١٦ بالعدد ٢٧ وفرض بقاء بقية مقـادير الوضع الثالث فانه يلزم تغيير عدد الساعات سـً بمقـدار آخر

يرمز له بحرف سـ وبمقارنة الوضع الرابع بالثالث يحدث هذا التناسب

٢٧ : ١٦ :: سـ : سـً (٣)

وبضرب حدود التناسبات (١) و (٢) و (٣) في بعضها يحدث تناسب

٢٤ × ١٥ × ٢٧ : ١٨ × ٢٠ × ١٦ :: سـَ × سـَ × سـً × سـ : ٨ × سـَ × سـَ وبقسمة حدّى النسبة الثانية على سـَ × سـً يحدث

٢٤ × ١٥ × ٢٧ : ١٨ × ٢٠ × ١٦ :: سـ : ٨ ومنه

$$\text{سـ} = \frac{٨ \times ٢٤ \times ١٥ \times ٢٧}{١٨ \times ٢٠ \times ١٦} = ١٣٫٥$$

حل مسائل القاعدة الثلاثية المركبة بطريقة الوحدة

٣٦٢ ـ لحل أي مسئلة من مسائل القاعدة الثلاثية المركبة بطريقة التحويل الى الوحدة نبحث عما يؤل اليه المقدار الذي من نوع المجهول بفرض أن جميع مقادير الاصول المقابلة له من الكميات الاخرى على التوالي مساوية للواحد ثم يستنبط من ذلك مايؤل اليه هذا المقدار عند تغير كل من هذه الوحدات على التوالي بما يقابله من المتعلقات

ولنوضح ذلك بحل المسئلة الآتية

قطعتان من الجوخ قومتا بمبلغ ٩٠٠ فرنك وكان طول كل واحدة منهما ٢٠ مترا والعرض ١٫٢٠ متر فما مقدار عرض ٣ قطع من مثل هذا الجوخ ثمنها ١١٢٥ فرنكا وطول كل واحدة ١٦ مترا

الحل توضع هكذا

قطعة	الثمن	طول	عرض	
٢	٩٠٠ ف	٢٠م	١,٢٠م	الاصول
٣	١١٢٥	١٦	س	المتعلقات
١	٩٠٠	٢٠	$١,٢٠ \times ٢$	
١	١	٢٠	$\frac{١,٢٠ \times ٢}{٩٠٠}$	
١	١	١	$\frac{١,٢٠ \times ٢ \times ٢٠}{٩٠٠}$	
٣	١	١	$\frac{١,٢٠ \times ٢ \times ٢٠}{٩٠٠ \times ٣}$	
٣	١١٢٥	١	$\frac{١,٢٠ \times ٢ \times ٢٠ \times ١١٢٥}{٩٠٠ \times ٣}$	
٣	١١٢٥	١٦	$\frac{١,٢٠ \times ٢ \times ٢٠ \times ١١٢٥}{٩٠٠ \times ٣ \times ١٦}$	
٣	١١٢٥	١٦	١,٢٥ وهو المطلوب	

وكيفية العمل ان يقال حيث أن عرض قطعتين من الجوخ اللتين ثمنهما ٩٠٠ ف وطول الواحدة ٢٠ م هو ١,٢٠ فاذا فرض أن قطعة من هذا الجوخ بلغ ثمنها ٩٠٠ فرنك وكان طولها ٢١ مترا فيلزم أن يكون عرضها أكبر من العرض السابق وهو ١,٢٠ م مرتين أى $١,٢٠ \times ٢$

واذا فرض أن هذه القطعة ثمنها فرنك واحد مع بقاء طولها ٢٠ م يلزم أن يكون العرض أقل من ذلك ٩٠٠ مرة أى $\frac{١,٢٠ \times ٢}{٩٠٠}$

واذا فرض أن طول هذه القطعة متر واحد يلزم أن يكون العرض أكبر من السابق ٢٠ مرة أى $\frac{١,٢٠ \times ٢ \times ٢٠}{٩٠٠}$

ثم اذا فرض أن ثلاث قطع ثمنها فرنك واحد وطول الواحدة متر واحد يلزم أن يكون العرض أصغر من السابق ٣ مرات أى يكون $\frac{١,٢٠ \times ٢ \times ٢٠}{٣ \times ١٠٠}$

واذا فرض أن ثمن هذه القطع الثلاث ١١٢٥ فرنكا فيكون العرض اكبر بمقدار ١١٢٥ مرة أى $\frac{١٫٢٠ \times ٢ \times ٢٠ \times ١١٢٥}{٩٠٠ \times ٣}$

واذا فرض أن طول كل واحدة من هذه القطع الثلاث ١٦ مترا يلزم أن يكون العرض أصغر من السابق بمقدار ١٦ مرة أى $\frac{١٫٢٠ \times ٢ \times ٢٠ \times ١١٢٥}{٩٠٠ \times ٣ \times ١٦}$

وهذا هو مقدار العرض المطلوب وبحسابه نجد أنه يساوى ١,٢٥ م

تنبيه ــ لسهولة حساب المقادير الناتجة يراعى اختصارها أولا بما تقدم بنمرة ١٤٦

اذا تاملنا فى نتائج حل المسائل السابقة نمرة ٣٦٠ و ٣٦١ و ٣٦٢ يستنتج القانون الآتى

٣٦٣ ــ قانون مقدار المجهول فى القاعدة الثلاثية المركبة يساوى حاصل ضرب نظيره المعلوم فى تتابع عدة كسور حدا كل كسر منها مقداران متحدا النوع من الكميات المعلومة ويكون بسط الكسر من المتعلقات اذا كان نوع حدّيه يتناسب مع نوع المجهول طرديا ويكون البسط من الاصول اذا كان نوع الحدين يتناسب مع النوع المجهول عكسيا

ولنطبق هذا القانون على حل المسئلة الآتية

مسئلة ــ بنى خمسون عاملا حائطا طوله ١٢٥ م وارتفاعه ٣ م وسمكه ٠,٦٠ م فى مدة ١٨ يوما وكانوا يشتغلون فى اليوم ٨ ساعات فما عدد

(٣)

الايام التى يبنى فيهـا ٣٢ عامــلا حائطا طوله ٢٠٠ م وارتفــاعه ٤ م وسمكه ٠,٥٠ م بحيث يشتغلون فى اليوم ١٠ ساعات

الحل توضع المسئلة هكذا

	عامل	طول	ارتفاع	سمك	يوم	ساعة
الاصول	٥٠	١٢٥ م	٣ م	٠,٦٠ م	١٨	٨
المتعلقات	٣٢	٢٠٠	٤	٠,٥٠	س	١٠
تعين النسب	عكسى	طردى	طردى	طردى		عكسى

س = ١٨ × ٥٠/٣٢ × ٢٠٠/١٢٥ × ٤/٣ × ٠,٥٠/٠,٦٠ × ٨/١٠ مقدار المجهول

أو س = (١٨ × ٥٠ × ٢٠٠ × ٤ × ٠,٥٠ × ٨) / (٣٢ × ١٢٥ × ٣ × ٠,٦٠ × ١٠) أو

س = ٤٠ يوما

مسائل على القاعدة الثلاثية المركبة

(٧٥٧) ناظر مدرسة صرف مبلغ ٢٤ جنيها لغذاء ٦٠ تلميذا فى مدة عشر أيام ماالذى يصرفه لغذاء ٩٠ تلميذا فى مدة ١٥ يوما

(٧٥٨) ٤٠٠ عسكرى محصورون فى قلعــة وعنــدهم مؤنة تكفيهم ١٨٠ يوما بفرض أن يعطى ٧٥٠ جراما للعســكرى الواحد فى اليوم فزاد عددهــم ١٠٠ وعلم أنه لايمكن أن تصلهم مؤنة قبل ٢٤٠ يوما فــاالذى يجب أن يصرف للعسكرى يوميا بحيث تكفيهم المؤنة

(٧٥٩) ٤٠ عاملا اشتغلوا ٣٠٠ م فى مدة ١٥ يوما وكان الشغل فى اليوم ١٠ ساعات فكم عاملا يشتغلون ١٨٠ م فى مدة ٢٠ يوما اذا كان الشغل فى اليوم ٩ ساعات

(٧٦٠) متعهد شغل ٢٤ عاملا فى حفر خندق فرفعوا فى مدة ١٨ يوما ٦٤٠٠ م مكعب من التراب وكانوا يشــتغلون فى اليوم ١٠ ساعات ويوجد ١٢٨٠٠ م مقتضى

شغلها ولكن لايوجد الا ١٦ عاملا ففى كم يوم يمكن تشغيلها اذا اشتغل هؤلاء العمال ٩ ساعات فى اليوم

(٧٦١) عاملان أتما فى مدة ٥ أيام ٩٠ متروكانا يشتغلان فى اليوم ٣ ساعات فما عدد الامتار التى يشتغلها ٣ من العمال فى مدة يومين اذا اشتغلوا فى اليوم ٧ ساعات وكانت نسبة صعوبة العمل الاول الى الثانى كنسبة ٥ الى ٦

(٧٦٢) ٤ قطع من الحرير طول الواحدة منها ١٦ مترا وعرضها ٨٠ و م قومت بمبلغ ١٢٨٠ قرش فما ثمن ٣ قطع من حرير آخر طول الواحدة ٢٠ مترا وعرضها ٦٠ر م اذا كانت نسبة جودة الحرير الاول الى الثانى كنسبة ٩ الى ١٠

(٧٦٣) ثلاثة من النقاشين نقشوا أسقف ٦ قاعات طول كل منها ٥ أمتار والعرض ٤ م فى مدة ١٠ أيام وكان الشغل اليومى ١٠ ساعات فما عدد الايام التى نقش فيها ٤ من النقاشين أسقف ٨ قاعات أخرى طول كل منها ٦ أمتار والعرض ٥ر٤ م — اذا كان الشغل اليومى ٩ ساعات

(٧٦٤) ٦٤٠ شغالا يشتغلون ١٠ ساعات فى اليوم فتمموا فى ٨٠ يوما حفر ترعة طولها ٢٠٠٠ م وعرضها ٨ م وعمقها ٤ م فما عدد الايام التى فيها ٨٠٠ عامل يشتغلون ٩ ساعات فى اليوم ويحفرون ترعة طولها ٣٠٠ م وعرضها ٩ م وعمقها ٦ م فى أرض صعوبتها أقل من صعوبة الاولى بمقدار الربع

(٧٦٥) رئيس مدرسة لزم له ٢٦٠٠ هكتولتر من القمح الذى وزن الهكتولتر منه ٧٥ كيلوجرام لغذاء تلامذة مدرسته مدة عشرة شهور (السنة المكتبية) وفى السنة التالية كان وزن الهكتولتر من القمح ٧٨ كيلوجرام وزاد عدد التلامذة الخمس فما مقدار مايلزم أن يشتريه لغذاء تلامذة مدرسته مدة عشرة شهور

(٧٦٦) آلة بخارية تشتغل ١٢ ساعة فى اليوم حرقت فى ٢١ يوما ٩٦٠٠ كيلوجرام من الفحم الحجرى فما مقدار مايصرف عليها اذا اشتغلت ١١ ساعة فى اليوم مدة ٣٠٠ يوم وكان ثمن الالف كيلوجرام من الفحم ١٧٥ قرشا

حسـاب المـائة

٣٦٤ ــ قد جرت العادة فى الاعمال التجارية وفى الاحصائيات العمومية اتخاذ المـائة أساسا فى الحساب وما يقابلها من ربح أوخسارة أوعدد مواليد بلد أووفياتها الخ يقال له النسبة فى المـائة ويرمز للنسبة فى المـائة بالعلامة ٪

فاذا قيل ان تجـارة ربحت ١٥ ٪ دل ذلك على ان كل مائة من رأس المـال يقابلها ١٥ من الربح ــ واذا قيل ان تجارة خسرت ٣ ٪ دل ذلك على أن كل مائة من رأس المـال يقابلها ٣ من الخسارة

واذا قيل ان مواليد بلد هى ١٢ ٪ بالنسبة لعدد سكانها دل ذلك على أنه يقابل كل ١٠٠ من السكان ١٢ من المواليد ــ واذا قيـل ان وفيات بلد ٤ ٪ دل ذلك على أن كل مائة من السكان يقابلها ٤ من المتوفين وهكذا

٣٦٥ ــ فى كثير من الاحوال تحل المسائل بايجاد النسبة فى المائة فاجرة ارسال النقود بالبوستة والسمسرة والعمولة ومصاريف التوريث ورسوم القضايا وغيرها تؤخذ بنسبة المـائة

فاذا قيل ان مصـاريف ارسال النقود هى ٠٫٣ ٪ دل ذلك على أن كل مائة قرش يدفع عنها ٠٫٣ القرش [١] واذا قيـل ان السمسرة هى ٢ ٪ دل ذلك على أن كل مائة يدفع عنها اثنان

(١) ما كان أقل من مائة يحسب مائة ولا يؤخذ أقل من قرش على أقل ارسالية

واذا قيل ان العمولة ١٠ ٪ دل ذلك على أن كل ١٠٠ قرش يدفع منها ١٠ قروش وهكذا

وحساب المائة له دخل عظيم فى تسهيل المقارنات

فاذا فرض أن رأس مال تجارة ٥٤٥٠ جنيها وربحت هذه التجارة ٣٢٧ جنيها ورأس مال تجارة أخرى ٦٠٠٠ جنيه وربحت ٣٤٥ جنيها فلا يعلم من بادئ الامر أى التجارتين أكثر مكسبا ولكن اذا بحث عن مقدار مايخص المائة من الربح فى كلتا التجارتين سهلت المقارنة وكذا اذا كان تعداد مدينة ٨٠٠٠٠ نفس ثم بلغ تعدادها ١٠٠٠٠٠ نفس وكان تعداد مدينة أخرى ٧٠٠٠٠ نفس ثم بلغ ٨٤٠٠٠ نفس فلا يعلم من بادئ الامر أى المدينتين أرقى زيادة ولكن اذا بحث عن مقدار مايخص كل مائة نفس من السكان من الزيادة فى كلتا المدينتين سهلت المقارنة

وحساب المائة يمكن ترجيعه الى القاعدة الثلاثية البسيطة وبذلك تحل المسائل المختلفة المتعلقة بها

٣٦٦ ــ المسائل الاساسية لحساب المائة يمكن أن تنحصر فى الحالات الآتية

أولا ــ أن يكون المعلوم المقدار الاصلى وما يقابله ويراد ايجاد النسبة فى المائة

ثانيا ــ أن يكون المعلوم النسبة فى المائة والمقدار الاصلى ويراد ايجاد مايقابله

ثالثا — أن يكون المعلوم النسبة فى المائة وما يقابل المقدار الاصلى ويراد ايجاد ذلك المقدار

وهناك أحوال اخرى ولكنها ترجع الى هذه الاحوال ولنوضح ذلك بحل المسائل الآتية

المسئلة الاولى — مدرســة بها ٤٥٠ تلميذ غاب منهم فى يوم ٢٧ فما النسبة فى المـائة للغائبين

الحل حيث ان ٤٥٠ تلميذا غاب منهـم ٢٧ فالمـائة يقابلها مقدار نرمز له بحرف س ويستخرج من التناسب ٤٥٠ : ٢٧ :: ١٠٠ : س ومنه س = ٦ فتكون النسبة فى المـائة للغائبين هى ٦ ٪

المسئلة الثانية — مقاول يدفع تامينا ١٥ ٪ من قيمة الاعمال التى يتعهد بعملها فاذا بلغت قيمة أعمال ٣٠٠٠ جنيه فما مقدار التأمين

الحل — اذا كانت قيمة الاعمـال ١٠٠ يكون التامين ١٥ وحيث ان قيمة الاعمـال ٣٠٠٠ فقيمة التامين تعلم من التناسب

١٠٠ : ١٥ :: ٣٠٠٠ : س ومنه س = ٤٥٠ جنيه

المسئلة الثالثة — شخص قطع $\frac{٢}{٣}$ ١٦ ٪ من طول طريق وكان مقدار ماقطعه ٣ كيلو متر فما مقدار طول الطريق

الحل — اذا كان ماقطعه $\frac{٢}{٣}$ ١٦ يكون طول الطريق ١٠٠ وحيث ان ماقطعه ٣ كيلومتر فطول الطريق يعلم من التناسب

$\frac{٢}{٣}$ ١٦ : ١٠٠ :: ٣ : س ومنه س = ١٨ كيلومتر

المسئلة الرابعة — تعداد سكان مدينة ٨٦٤٠٠ نفس وعدد المشتغلين بالتعلم فيها ٣٨٨٨ نفسا وتعداد مدينة أخرى ٧٥٠٠٠ نفس وعدد المشتغلين بالتعليم فيها ٣٥٢٥ نفسا والمطلوب معرفة أى المدينتين أرقى اشتغالا بالتعليم

الحل — نبحث عن النسبة فى المائة للمشتلغين بالتعليم فى الاولى ويمكن استخراجها من هذا التناسب

٨٦٤٠٠ : ١٠٠ :: ٣٨٨٨ : س ومنه س = ٤٫٥

ثم نبحث عن النسبة فى المائة للمشتغلين بالتعليم فى المدينة الثانية ويمكن استخراجها من هذا التناسب

٧٥٠٠٠ : ١٠٠ :: ٣٥٢٥ : س ومنه س = ٤٫٧

فيعلم أن المدينة الثانية أرقى من الاولى اشتغالا بالتعليم

المكسب والخسارة

٣٦٧ — اذا بيع شئ بزيادة عن ثمن مشتراه يقال انه بيع بمكسب واذا بيع بنقص عن ثمن مشتراه يقال انه بيع بخسارة والفرق بين ثمن الشراء وثمن البيع هو الكسب أو الخسارة

وقد جرت العادة أن بين المكسب أو الخسارة بالنسبة للمائة من الثمن الاصلى (ثمن الشراء)

فاذا اشتريت كتابا بمبلغ ٤٠٠ مليم ثم بعته بمبلغ ٤٨٠ مليم يقال انه بيع بمكسب مقداره ٤٨٠ — ٤٠٠ = ٨٠ وهذا المقدار يبين بالنسبة لثمن الشراء بالمقدار $\frac{٨٠}{٤٠٠}$ أو ٢٠ ٪ واذا اشتريت ساعة بمبلغ

١٥٠ قرش وبعتها بمبلغ ١٢٥ يقال انها بيعت بخسارة مقدارها ١٥٠ — ١٢٥ = ٢٥ وهذا المقدار بين بالنسبة لثمن الشراء بالمقدار $\frac{٢٥}{١٥٠}$ أو $\frac{٢}{٣}$ ١٦ ٪

ومسائل المكسب والخسارة تشابه مسائل حساب المائة فهى ترجع أيضا الى القاعدة الثلاثية البسيطة ويلاحظ أن المبلغ الاصلى (ثمن الشراء) والمائة مقداران من نوع واحد ويقابلهما ربح المبلغ الاصلى أو خسارته وربح المائة أو خسارتها وان المبالغ والارباح تتناسب طرديا وكذا المبالغ والخسارة ولنات بامثلة على ذلك فنقول

المسئلة الاولى — تجارة رأس مالها ٦٧٥٠ جنيها ربحت ٥٤٠ جنيه والمطلوب تقدير النسبة فى المـائة لربح هذه التجارة

الحل — حيث ان مبلغ ٦٧٥٠ جنيها يربح ٥٤٠ جنيها فالمائة جنيه تربح مبلغا يرمز له بحرف س ويمكن استخراجه من هـذا التناسب ٦٧٥٠ : ١٠٠ :: ٥٤٠ : س ومنه س = $\frac{١٠٠ \times ٥٤٠}{٦٧٥٠}$ = ٨ وحينئذ يقال ان النسبة فى المائة هى ٨

المسئلة الثانية — اذا كان فى ربح تجارة النسبة فى المـائة هى ١٥ فما يكون ربح ٤٦٥ جنيها

الحل — يفهم من منطوق المسـئلة أن مائة جنيه تربح ١٥ ويراد معرفة ربح ٤٦٥ جنيها فيقـال حيث ان مائة جنيه تربح ١٥ فالجنيه الواحد يربح $\frac{١٥}{١٠٠}$ ومبلغ ٤٦٥ يربح $\frac{٤٦٥ \times ١٥}{١٠٠}$ = ٦٩,٧٥ جنيهـا وهو الربح المطلوب

المسئلة الثـالثة ـ تجارة خسرت ٩٤٥ قرشا وقوّمت هذه الخسارة بنسبة ٣ ٪ لرأس المال فما مقداره

الحـل ـ يفهم من ذلك أن ١٠٠ خسرت ٣ ويراد معرفة المبلغ الذى خسر ٩٤٥ قرشا ولذلك يقـال حيث ان ٣ هى خسارة ١٠٠ فيكون قرش واحد خسـارة لمبلغ أقل من المـائة ٣ مرات أى $\frac{١٠٠}{٣}$ ومبلغ ٩٤٥ فرنكا خسارة لمبلغ أكبر من ذلك ٩٤٥ مرة أى $\frac{٩٤٥ \times ١٠٠}{٣}$ = ٣١٥٠٠ قرش

٣٦٨ ـ تنبيه فى مسائل حساب المائة والمكسب والخسارة قد تحل الجملة (وهى مقدار مركب من المقـدار الاصلى مضافا اليه ربحه أو زيادته) محل المقدار الاصلى فى معلومات المسئلة

فاذا علمت الجملة والنسبة فى المائة وأريد ايجاد المقدار الاصلى نعتبر المقـدار المنـاظر للجملة هو مجموع (المـائة وربحها أو المـائة وزيادتهـا) أو الفرق بين المـائة وخسارتهـا (فى الخسارة) وبذلك يمكن الوصول الى المطلوب

وأما اذا علم مع الجملة المقدار الاصلى وأريد ايجاد النسبة فى المـائة فان الفرق بين المقـدارين المعلومين يكون هو مقدار الربح أو الخسارة وحينئذ فترجع الى الحالة الاولى

وكذا اذا علم مع الجملة المقدار المقابل للمقدار الاصلى وأريد ايجاد النسبة فى المائة فان الفرق بين المقـــدارين المعلومين يكون هو المقدار الاصلى وحينئذ فنرجع الى الحالة الاولى ولنات على ذلك بامثلة توضحها فنقول

المثال الاول ـ تجارة ربحت ١٢ ٪ وكان جملة مابيعت به هو ٧٢٨٠ قرشا فما مقدار الثمن الاصلى

الحل ـ حيث ان المائة تربح ١٢ فيكون ١١٢ قرشا من ثمن المبيع يقابله ١٠٠ قرش من الثمن الاصلى ويكون قرش واحد من ثمن المبيع يقابله $\frac{١٠٠}{١١٢}$ ومبلغ ٧٢٨٠ قرشا من ثمن المبيع يقابله $\frac{٧٢٨٠ \times ١٠٠}{١١٢} = ٦٥٠٠$ وهو الثمن الاصلى

المثال الثانى ـ تاجر خسر فى بيعة ٥ ٪ وكان قيمة مابيعت به ٥٧ قرشا فما مقدار الثمن الاصلى

حيث ان المائة خسرت ٥ فيكون ٩٥ قرشا من ثمن المبيع يقابله ١٠٠ من الثمن الاصلى ويكون قرش واحد من ثمن المبيع يقابله $\frac{١٠٠}{٩٥}$ ومبلغ ٥٧ قرشا من ثمن المبيع يقابله $\frac{٥٧ \times ١٠٠}{٩٥} = ٦٠$ وهو الثمن الاصلى

المثال الثالث ـ تاجر اشترى بضاعة بمبلغ ١٥٠٠٠ قرش وباعها بمبلغ ١٦٥٠٠ قرش فما النسبة فى المائة للربح

الحل ـ تطرح ١٥٠٠٠ قرش من ١٦٥٠٠ قرش يبقى ١٥٠٠ قرش وهو مقدار الربح وحينئذ فبمعرفته مع الثمن الاصلى وهو ١٥٠٠ قرش يرجع الامر الى (المسئلة الاولى) وبحلها يعلم ان النسبة فى المائة هى ١٠

المثال الرابع ـ بلغ تعداد سكان بلد ٨٥٦٠ نفسا وكانت زيادة هذا التعداد عن السابق هى ٥٦٠ نفسا فما النسبة فى المائة لزيادة تعدادها

الحل — تطرح ٥٦٠ من ٨٥٦٠ يبقى ٨٠٠٠ نفس وهو مقدار التعداد السابق وبمعرفته مع مقدار الزيادة يمكن استخراج النسبة في المائة فنجدها تساوي ٧

مسائل على حساب المائة والمكسب والخسارة

(٧٦٧) بأي نسبة في المائة تنسب ٣ قروش الى ٤٥ قرشا و ٢٠ رطلا الى ثلاثة قناطير و ٧٣ يوما للسنة و ٣ كيلات للاردب

(٧٦٨) بأي نسبة في المائة تنسب ٨ شلن للجنيه الانجليزي و ٢ فرنك للبنتو و ٣ قصبات للفدان

(٧٦٩) أرض ثمن الفدان منها ٩٠ جنيها ويمكن تأجيره بمبلغ ٨ جنيهات سنويا وأرض أخرى ثمن الفدان منها ١٢٥٠ جنيها ويمكن تأجيره بمبلغ ١١ جنيها كل سنة فأيهما أرجح للمشتري

(٧٧٠) مدرسة بها ٣٠٠ تلميذ ومتوسط عدد من يحضر من التلامذة كل يوم ٢٨٤ فما النسبة في المائة للحاضرين وما النسبة في المائة للغائبين

(٧٧١) كان تعداد سكان القطر المصري في سنة ١٨٨٢ هو ٦٨٢١٧٢٧ نفسا وبلغ مقدار الزيادة ٢٩١٢٦٧٨ نفسا في تعداد سنة ١٨٩٧ فما النسبة في المائة في زيادة التعداد

(٧٧٢) بائع استعمل الكيلو جرام في الوزن بدلا عن الاقة فما مقدار الخسارة في المائة (على المشتري)

(٧٧٣) شخص اشترى بيتا بمبلغ ٨٢٠ جنيها ودفع مصاريف اخراج حجته باعتبار ٢ ./. فما مقدار مصاريف الحجة — وما مقدار الثمن والمصاريف

(٧٧٤) تاجر اشترى بضائع بمبلغ ٤١٨ جنيها ونظرا لكونه يدفع الثمن فورا تنازل له البائع عن ٤ ./. فما مقدار ما يدفعه المشتري

(٧٧٥) سمسار باع ٨٦ مترا من الجوخ بسعر المتر ١٣ فرنكا و ٦٤ مترا من الحرير بسعر المتر ٨٫٥ فرنكات و ١٩٢ مترا من التيل بسعر المتر ١٫٧٥ فرنك فما مقدار ما يستحقه السمسار على حساب ٢ ٪

(٧٧٦) تجارة خسرت ١٧ ٪ فما مقدار خسارتها فى ٨٦

(٧٧٧) فلاح اشترى فدانا أرضا بمبلغ ٩٦ جنيها ثم باعه لآخر وربح فيه ١٥ ٪ ثم ان هذا المشترى باعه لثالث وخسر ١٠ ٪ فما مقدار ما اشترى به الثالث

(٧٧٨) ما رأس مال شركة تجارية بلغ مكسبها ٤٢٦٤ بنسبة ٥ ٪

(٧٧٩) ما عدد سكان مدينة تعداد منازلها ٢٣١٢ منزلا وهو بنسبة ١٧ ٪ من عدد السكان

(٧٨٠) شخص يصرف ٨٢ ٪ من ايراده السنوى ويوفر فى السنة ٢١ جنيها و ٦٠٠ مليم فما ايراده السنوى

(٧٨١) رجل اشترى فرسا ودفع ٢٫٢٥ جنيه سمسرة على حساب ٥ ٪ فما ثمن الفرس

(٧٨٢) زيد اشترى منزلا ثم باعه لعمرو وربح ١٢ ٪ ثم ان عمرا باعه لخالد وربح ٪ وكان مادفعه خالد هو ٧٢٥ جنيها و ٧٦٠ مليما فما مقدار الثمن الذى اشترى به زيد

(٧٨٣) كان تعداد سكان مدينة القاهرة فى احصاء سنة ١٨٨٢ هو ٣٧٤٨٣٨ نفسا وتعدادها فى احصاء سنة ١٨٩٧ هو ٥٧٠٠٦٢ فما نسبة الزيادة فى المائة

(٧٨٤) تاجر باع ٤٨ قنطارا من السكر بسعر القنطار ٨٤ قرشا فربح ٣٣٦ قرشا فما مقدار النسبة فى المائة لما ربحه

(٧٨٥) تجارة رأس مالها ٥٤٥٠ جنيها و بلغ مكسبها فى سنة ٣٢٧ جنيها وتجارة أخرى رأس مالها ٦٠٠٠ جنيه و بلغ مكسبها فى السنة عينها ٣٤٥ جنيه فأى التجارتين أرقى مكسبا

(٧٨٦) تعداد مدينة ١٠٠٠٠٠ نفس وتعداد مدينة أخرى ٨٤٠٠٠ نفس وقبل ذلك بخمس سنوات كان تعداد المدينة الاولى ٨٠٠٠٠ وتعداد الثانيـة ٧٠٠٠٠ فأى المدينتين أرقى فى الزيادة

(٧٨٧) مدرسة قدمت للامتحان ٤٥ طالبا نجح منهم ٣٢ ومدرسة أخرى قدمت في هذا الامتحان ٦٣ طالبا ونجح ٤٥ فأيتهما أرقى

(٧٨٨) رجل باع بيتا بمبلغ ٥١٦ جنيها مصريا فبلغ ربحه $\frac{1}{2}$ ٧ ٪ فبكم كان يبعه اذا كانت الخسارة $\frac{1}{2}$ ٧ ٪

(٧٨٩) تاجر باع الشئ الذى ثمنه ٣٢ فرنكا بمبلغ ٤٠ فرنكا فما مكسبه في المائة

(٧٩٠) تلميذ حصل على درجة ٢٥ فى اللغة العربية التى درجتها النهائية ٣٠ وحصل على ٣٦ فى الحساب وكانت الدرجة النهائية فيه ٤٠ وحصل على ١٧ فى علم الجغرافيا والدرجة النهائية فيه ٢٠ وحصل على ١٢ فى الخط وكان الدرجة النهائية فيه ١٥ ففى أى هذه العلوم كان هذا التلميذ أرقى تقدما

(٧٩١) تاجر اشترى ٢٤٠ متر من الحرير وباع ربع هذا القدر بمكسب ٢٥ ٪ وثلثه بمكسب ٢٠ ٪ والباقى بخسارة ١٥ ٪ وكان المبلغ الذى باع به الجميع ١٦٠ جنيها فما يكون الثمن الاصلى للباردة

(٧٩٢) بائعة بيض تشترى كل ١٠٠٠ بيضة بمبلغ ١٦٠ قرشا فكم بيضة تبيع بمبلغ ١٣٠ قرشا لتكسب ٢٥ ٪

(٧٩٣) شخص اشترى مقدار من البرتقال بسعر كل ١٠٠ برتقاله بمبلغ ١٢٫٥ قرش ومقدار مثله بسعر كل ١٠٠ برتقاله بمبلغ ١٠ قروش وباع الجميع كل ٤ بقرش فما مكسبه فى المائة

(٧٩٤) تاجر خيل اشترى ٧٦ حصانا باثمان متساوية وباع منها ٢٠ بمكسب ١٥ ٪ و ٤٠ بمكسب ١٩ ٪ والباقى بمكسب ٢٥ ٪ فبلغ مكسبه الكلى ٦٥٧ جنيها فكم ثمن كل حصان

(٧٩٥) باع بقال بضائع ربح فى ربعها ٥ ٪ وفى ثلثها ١٠ ٪ وفى الباقى ٢٠ ٪ فبلغ ما باع به تلك البضاعة $\frac{3}{4}$ ٦٧ جنيها والمطلوب معرفة الثمن الاصلى

التقسيم التناسبي

٣٦٩ ـ التقسيم التناسبي هو تقسيم عدد معلوم الى أجزاء تكون مناسبة لمقادير معلومة

ويقال ان الاعداد مناسبة لمقادير معلومة متى كانت النسبة بين كل عدد وما يقابله من المقادير المعلومة ثابتة

فتقسيم العدد ٩٠ الى اجزاء مناسبة للاعداد ٣ و ٥ و ٧ هو تجزئته الى ثلاثة أجزاء بحيث يكون نسبة الجزء الاول الى ٣ كنسبة الجزء الثانى الى ٥ وكنسبة الجزء الثالث الى ٧ .

وللوصول الى ذلك يقال اذا فرض ان العدد المراد تقسيمه هو ٣ + ٥ + ٧ أى ١٥ كان الجزء الاول ٣ والثانى ٥ والثالث ٧ اذ ان $\frac{٣}{٣} = \frac{٥}{٥} = \frac{٧}{٧}$ واذا كان العدد المراد تقسيمه ١ أى أصغر من ١٥ بمقدار ١٥ مرة كانت الاجزاء المطلوبة أصغر من هذه الاجزاء ١٥ مرة أى $\frac{٣}{١٥}$ و $\frac{٥}{١٥}$ و $\frac{٧}{١٥}$ واذا كان العدد المراد تقسيمه أكبر من الواحد مرتين أو ثلاثة أو أكثر كانت الاقسام المطلوبة أكبر من الاقسام المذكورة مرتين أو ثلاثة أو أكثر ولما كان العدد المراد تقسيمه هو ٩٠ فالاجزاء تكون أكبر من ذلك ٩٠ مرة أى تكون $\frac{٣\times٩٠}{١٥}$ و $\frac{٥\times٩٠}{١٥}$ $\frac{٧\times٩٠}{١٥}$ أعنى هى ١٨ و ٣٠ و ٤٢ ومن حيث ان المقادير المذكورة يمكن وضعها هكذا $\frac{٩٠}{١٥} \times ٣$ و $\frac{٩٠}{١٥} \times ٥$ و $\frac{٩٠}{١٥} \times ٧$ تنتج القاعدة الآتية

٣٧٠ ـ قاعدة ـ لتقسيم عدد معلوم الى أجزاء مناسبة لمقادير معلومة نجمع المقادير المعلومة ونقسم العدد المراد تقسيمه على مجموعها ونضرب الخارج فى كل عدد منها

تنبيه ـ اذا كانت الاعداد المعلومة كسورا نجنسها ثم نقسم العـدد المراد تقسيمه الى أجزاء مناسبة للبسوط

ولتطبيق هذه القاعدة على حل المسائل الآتية فنقول

المسئلة الاولى ـ المطلوب تقسيم ٣٦٠ قرشا بين ثلاثة أشخـاص بحيث تكون أنصبتهم مناسبة للاعداد ٣ و ٤ و ٥

الحـل نجمـع ٣ و ٤ و ٥ فينتج ١٢ ثم نقسم ٣٦٠ على ١٢ فينتج ٣٠ فنضربه فى ٣ و ٤ و ٥ فينتج على التوالى ٩٠ قرشا و ١٢٠ قرشا و ١٥٠ قرشا تكون هى الانصبة المطلوبة

والتحقيق أولا ان ٩٠ + ١٢٠ + ١٥٠ = ٣٦٠ وثانيا ان $\frac{٩٠}{٣} = \frac{١٢٠}{٤} = \frac{١٥٠}{٥}$ اذ أن كل نسبة منها تساوى ٣٠

المسئلة الثانية ـ المطلوب تقسيم ٣٩٦ فدانا بين ثلاثة أشخاص بحيث تكون الاقسام مناسبة للاعداد ١ و $\frac{٣}{٥}$ و $\frac{٧}{٨}$

الحل ـ نجنس الكسرين $\frac{٣}{٥}$ و $\frac{٧}{٨}$ فينتج $\frac{٢٤}{٤٠}$ و $\frac{٣٥}{٤٠}$ ونعتـبر ان الواحد هو $\frac{٤٠}{٤٠}$ وحينئذ فنقسم العـدد ٣٩٦ فدانا الى أجزاء مناسـبة للبسوط ٤٠ و ٢٤ و ٣٥ وباجراء العمل كما فى المسـئلة السابقة يوجد ان الاقسام المطلوبة هى ١٦٠ فدانا و ٩٦ فدانا و ١٤٠ فدانا

المسئلة الثالثة ـ المطلوب تقسيم ٤٢٣,٥ الى أجزاء مناسبة لعكس المقادير ٢ و ٣ و ٤ و ٥

الحـل ـ عكس هـذه المقادير هو $\frac{١}{٢}$ و $\frac{١}{٣}$ و $\frac{١}{٤}$ و $\frac{١}{٥}$ فنقسم العدد ٤٢٣,٥ الى أجزاء مناسـبة لهذه الكسور ولذلك نجنسها فتنتج

$\frac{٣٠}{٦٠}$ و $\frac{٢٠}{٦٠}$ و $\frac{١٥}{٦٠}$ و $\frac{١٢}{٦٠}$ ثم تقسم العدد ٤٢٣,٥ الى أجزاء مناسبة للبسوط فينتج ١٦٥ , ١١٠ , ٨٢,٥ , ٦٦ وهى الاقسام المناسبة على التوالى لعكس المقادير المفروضة

مسائل على التقسيم التناسبي

(٧٩٦) اقسم مبلغ ١٢٦ قرشا بين ثلاثة أشخاص بحيث يكون نصيب الاول ثلث نصيب الثانى وضعف نصيب الثالث

(٧٩٧) اقسم ٢٠ فدانا بين شخصين بحيث يكون نصيب الاول $\frac{٣}{٤}$ نصيب الثانى

(٧٩٨) أب كافأ ولديه بمبلغ اثنين بنتو ليقسماه بينهما بالنسبة لدرجة كل منهما فى التعليم وكان درجة الاول ١٧,٥ والثانى ١٤,٥ فما نصيب كل بالفرنك

(٧٩٩) ثلاثة من أرباب المعاشات أخذوا ٢٥٠ فدانا بدلا عن معاشهم ليقتسموها بينهم بالنسبة لمدة خداماتهم وكانت مدد خدمة الاول ٣٢ سنة و ٩ شهور ومدة خدمة الثانى ٣٦ سنة و ٣ شهور ومدة خدمة الثالث ٢٤ سنة و ٤ شهور فما نصيب كل منهم

(٨٠٠) نجار تعهد بعمل عملية نجارة بأجرة قدرها ٦٥٠ قرشا فاشتغل مدة ١٢ يوما وكان يشتغل فى اليوم ١١ ساعة وشاركه فى العمل صانعان الاول اشتغل ٩ أيام فى كل يوم ١٠ ساعات والثانى ٨ أيام فى كل يوم ٨ ساعات واتفقوا على أن يقسم المبلغ بينهم بالنسبة لايام كل منهم ومدة شغله اليومى ولكن يختص النجار الاول بمبلغ ٧٨ قرشا يأخذه من المبلغ قبل تقسيمه فما نصيب كل منهم

(٨٠١) سيد أنعم على خادميه بمبلغ ٣٤٣ قرشا وأن يقسم بينهما على عكس مرتبيهما الشهرى وكان مرتب الاول ١٠٠ قرش والثانى ٧٥ فما نصيب كل منهما

(٨٠٢) عم وهب لثلاثة من أولاد أخيه مبلغ ٤٨٢٨ جنيها ليقتسموه بينهم على عكس سنهم وكان عمر الاول ٢٨ سنة والثانى ٢٠ سنة والثالث ١٢ سنة فما نصيب كل منهم

(٨٠٣) قيل لشخص كم مضى من الليل فقال ثلث مامضى يساوى ربع مابقى فكم مضى وكم بقى (بفرض الليل ١٢ ساعة)

(٨٠٤) المطلوب تقسيم ٦٠٠٠ قرش بين ثلاثة أشخاص بحيث ان الثانى يأخذ ثلاثة أخماس مايأخذه الاول وان الثالث يأخذ $\frac{٧}{٨}$ مجموع مايأخذه الاول والثانى

(٨٠٥) رجل مدين لثلاثة أشخاص فللاوّل عنده ١٥٠٠٠ قرش وللثانى ١٤٠٠٠ قرش وللثالث ١٢٠٠٠ قرش ولكنه لايملك الا ١٥٣٦٠ قرش فما يخص كلا منهم بالنسبة الى دينه

الشركة

٣٧١ ـ تعريف ـ الغرض من قاعدة الشركة تقسيم المكسب أو الخسارة بين الشركاء

ومن الواضح أن مايخص كل شريك من المكسب أو الخسارة يناسب لرأس ماله ولمدة وجود رأس ماله فى المشروع

فلها ثلاثة أحوال ـ الاول أن تكون رؤس الاموال مختلفة مع تساوى الزمن ـ الثانى أن تكون رؤس الاموال متساوية والازمنة مختلفة ـ الثالث أن تكون رؤس الاموال مختلفة والازمنة كذلك

٣٧٢ ـ أولا ـ اذا كانت رؤس الاموال مختلفة والازمنة متساوية فيقسم مقدار المكسب أو الخسارة الى أجزاء مناسبة لرؤس الاموال

مسئلة ـ ثلاثة شركاء ربحوا فى تجارة ٦٥٠ جنيها وكان ماوضعه الاول ١٥٦٠ جنيها وما وضعه الثانى ١٦٤٠ جنيها وما وضعه الثالث ٢٠٠٠ جنيه والمطلوب معرفة مايخص كل شريك من هذا الربح

فلذلك يقال حيث ان مكسب كل شريك ينـاسب رأس ماله (بما أن الزمن متحد) فنقسم مقـدار الربح وهو ٦٥٠ جنيها الى أجزاء مناسـبة لرؤس الاموال ١٥٦٠ جنيها و ١٦٤٠ جنيها و ٢٠٠٠ جنيه فعلى حسب ماتقدّم فى قاعده القسمة التناسبية نجد أن مايخص الشريك الاول ١٩٥ جنيها والثانى ٢٠٥ جنيها والثالث ٢٥٠ جنيها

٣٧٣ ــ ثانيا ــ اذا كانت رؤس الاموال متساوية والازمنة مختلفة فيقسم مقدار المكسب أو الخسارة الى أجزاء مناسبة للازمنة

مسئلة ــ أربعـة شركاء وضع كل واحد منهم ٨٠٠٠ قرش لكن مبلغ الاول مكث فى التجارة ٧ أشهر والثانى ٦ أشهر والثالث ٥ أشهر والرابع ٣ أشهر واكتسبوا فى هـذه التجارة ٤٢٠٠ قرش فما مقدار مايخص كل واحد منهم

الحل ــ يقال حيث ان المبالغ متساوية فمكسب كل شريك يناسب مدّة وجود مبلغه فى التجارة وعلى هذا فيكفى أن نقسم مقدار المكسب وهو ٤٢٠٠ قرش الى أجزاء مناسبة لعدد الاشهر وهى ٧ و ٦ و ٥ و ٣ وعلى حسب ماتقـدّم فى التقسيم التناسبى نجد أن مايخص الاول ١٤٠٠ قرش ومايخص الثانى ١٢٠٠ قرش ومايخص الثالث ١٠٠٠ قرش وما يخص الرابع ٦٠٠ قرش

٣٧٤ ــ ثالثا ــ اذا اختلفت رؤس الاموال واختلفت الازمان فيقسم مقدار المكسب أو الخسارة الى أجزاء مناسبة لحواصل ضرب رأس مال كل شريك فى زمنه (ويراعى توحيد وحدات الازمنة)

مسئلة ـ ثلاثة اشـــتركوا فى مشروع فوضع الاول ٤٠٠ جنيـه مدّة سنة والثانى ٦٠٠ جنيه مدّة ١٠ شهور والثالث ٨٠٠ جنيه مدّة ٩ شهور واكتسبوا مبلغ ٢٢٥ جنيها فما الذى يخص كلا منهم

الحل ـ يقال ان مكسب ٤٠٠ جنيه فى مدة سنة يعادل مكسب مبلغ أكبر منه ١٢ مرّة فى مدّة شهر واحد أى ٤٠٠ × ١٢ = ٤٨٠٠ جنيه ومكسب ٦٠٠ جنيه فى ١٠ أشهر يعادل مكسب مبلغ أكبر منه عشر مرات فى شهر واحد أى ٦٠٠ × ١٠ = ٦٠٠٠ جنيه ومكسب ٨٠٠ جنيه فى ٩ أشهر يعادل مكسب مبلغ أكبر منه ٩ مرات فى شهر واحد أى ٨٠٠ × ٩ = ٧٢٠٠ جنيه وحينئذ فيمكن أن نعتبر أن الشريك الاول وضع ٤٨٠٠ جنيه والثانى ٦٠٠٠ جنيه والثالث ٧٢٠٠ جنيه وان كلا منها مكث شهرا واحدا فى التجارة فترجع المسـئلة الى الحالة الاولى فنقسم مقدار المكسب وهو ٢٢٥ جنيها الى أجزاء مناسبة للاعداد ٤٨٠٠ , ٦٠٠٠ , ٧٢٠٠ فنجد أن مايخص الاول ٦٠ جنيها والثانى ٧٥ جنيها والثالث ٩٠ جنيها

٣٧٥ ـ تنبيه ـ اذا فقدت رؤوس الاموال فلا يزال كل شريك مسئولا لباقى الشركاء بان يدفع لهم مبلغا أو ياخذ منهم مبلغا ولنوضح ذلك بمسئلة فنقول

شريكان وضع كل منهما ٤٠٠٠ قرش ومكث مبلغ الاول فى التجارة ٦ أشهر ومبلغ الثـانى أربعـة أشهر ثم فقدت رؤوس الاموال فكيف يتحاسبون

الحل ـ يقال حيث ان رأس المال فقد فكأنهم خسروا ٨٠٠٠ قرش فيقسم هذا المبلغ الى جزأين مناسبين الى ٦ أشهر و ٤ أشهر (حيث ان رأس مال كل منهما قدر الآخر)

وعلى حسب قاعدة التقسيم التناسبي يكون

مايخص الاول هو $\frac{٨٠٠٠ \times ٦}{١٠} = ٤٨٠٠$

ومايخص الثانى هو $\frac{٨٠٠٠ \times ٤}{١٠} = ٣٢٠٠$

وحينئذ فيكون الاول مدينا للثانى فى ٨٠٠ قرش

مسائل على الشركة

(٨٠٦) اشترك شخصان فى تجارة فوضع الاول ٤٣٥١ فرنكا ووضع الثانى ٦٨٤٩ فرنكا وكان مكسبهما ٢٨٠٠ فرنك فما يخص كل شريك من هذا المكسب

(٨٠٧) ثلاثة شركاء نتج لهم مكسب ١٥٠٠٠ قرش وكان مبلغ الاول مكث فى التجارة ٤ أشهر والثانى ٥ أشهر والثالث ٧ أشهر فما يخص كل شريك من هذا المكسب

(٨٠٨) فتح شخص محلا للتجارة برأس مال قدره ٨٠٠ جنيه وبعد ٤ أشهر شاركه آخر ودفع مبلغ ٦٠٠ جنيه انجليزى وبعد شهرين شاركهما ثالث ووضع مبلغ ١٠٠٠ بنتو وفى آخر السنة من افتتاح المحل وجد أن الشركة ربحت ٤٧٢ جنيها و ٧٢٥ مليما فما الذى يخص كل واحد منهم

(٨٠٩) شريكان وضع أحدهما ٣٠٠٠ فرنك مدة ٦ أشهر ووضع الثانى ٢٥٠٠ شلن مدة ٤ أشهر وربحت الشركة ١٠٠ جنيه فما الذى يخص كلا منهما من هذا المكسب

(٨١٠) اشترك شخصان فى تجارة فكان مكسبهما ١٢٠٠٠ فرنك والاول الذى وضع ٨٠٠٠ فرنك خصه من هذا الربح ٥٠٠٠ فرنك فامقدار ماوضعه الشريك الثانى

(٨١١) شريكان نتج لهما مكسب ٥٤٠٠ قرش وكان ماوضعه الاول ٤٣٠٠ قرش ومكسب الشريك الثانى ٢٨٢٠ قرشا فما مكسب الاول وما رأس مال الثانى

(٨١٢) شريكان نتج لهما من مكسب الشركة ٧٤٤٠ فرنكا وكان رأس مالهما ١٢٠٠٠ فرنكا والمطلوب معرفة ماوضعه كل منهما بفرض أن الثانى أخذ من هذا المكسب أقل من الاول بقدر ١٧٢٦ فرنكا

(٨١٣) رأس مال شريكين ١٣٧٠٠ قرش ومكسبهما ٧٣٩٨ قرشا والمطلوب معرفة مكسب كل منهما بعد معرفة ان ماوضعه الثانى يزيد عما وضعه الاول ٢٩٠٠ قرشا

(٨١٤) تشارك شخصان فى تجارة بمبلغين متساويين ومكث مبلغ أحدهما ١٧ شهرا وكان مكسبه ٣٤٠٠ قرش فما الزمن الذى وضع فيه مبلغ الثانى حتى ان مكسبه بلغ ٢٥٠٠ قرش

(٨١٥) تاجر ابتدأ فى التجارة برأس مال قدره ١٢٠٠٠ قرش وبعد ٨ أشهر وضع معه شخص مبلغا قدره ٥٠٠٠ قرش وبعد ١٠ أشهر وضع آخر ٣٠٠٠ قرش ثم بعد ٣ أشهر وضع أيضا ٦٠٠ قرشا وكان المكسب الكلى بعد سنتين من ابتداء هذه التجارة ٢١٣٢٩ قرشا والمطلوب معرفة مايخص كل شريك من المكسب

(٨١٦) اشترك شخصان فى شراء منزل بمبلغ ١٢٠٠ جنيها فوضع الاول $\frac{١٧}{٢٤}$ من ثمنه ووضع الثانى الباقى ثم باعاه بمبلغ أقل من ثمن الشراء بمقدار ٩٦ جنيها فما مقدار خسارة كل منهما

(٨١٧) اشترك أربعة تجار فى محل تجارة فوضع الاول ٢٠٠ اردب قمح بسعر الاردب جنيه مصرى ووضع الثانى ١٨٠ أردب فول بسعر الاردب ٩٦ قرشا ووضع الثالث ١٦٠ أردب عدس بسعر الاردب ٦٥ قرشا وضع الرابع ١٠٠ زنبيل أرز بسعر الزنبيل ٦٠ قرشا ثم بيعت هذه الاصناف بمبلغ ٥٧٤١٤ قرشا فما يخص كل شريك من المكسب

(٨١٨) ثلاثة شركاء وضع أحدهم ٣٠٠٠ فرنك ووضع الثانى بعد ٧ أشهر ٢٤٠٠ فرنك ووضع الثالث بعد شهر ٢٠٠٠ فرنك ثم بعد ٨ أشهر وجد أن رؤس أموالهم آلت الى ٤١٠٨,٨٠ فرنك فكيف يتحاسبون

(٨١٩) أربعـة أخوة شرعوا فى عمل عمارة فدفع الاول ثمن الارض ٥٠٠ جنيه ودفع الثانى كلفة البناء ١٧٥٠ جنيها وقام الثالث بكلفة النجر ٦٠٠ جنيه ودفع الرابع مصاريف الزخرفة ٣٠٠ جنيه ثم أجروا هذه العمارة بمبلغ ٢٠ جنيها كل شهر فما مقدار مايخص كل واحد منهم من دخل سنة

(٨٢٠) تشارك شخصان فى شراء بضاعة فكان ربع ماوضـعه الاول يعادل ثلث ماوضـعه الثانى وربحت البضاعة ٥٢٫٥ شلنا فما يخص كل واحد منهـما من هذا الربح

(٨٢١) تعهد متعهد بتطهير ترعة بمبلغ ٦٥٨ جنيها واشتغل فى تطهيرها طائفتان من العملة فما الذى يخص كلا منهما اذا كان $\frac{٤}{٥}$ أنفار الطائفة الاولى يعادل $\frac{٣}{٤}$ أنفار الطائفة الثانية ومعلوم أن المتعهد يأخذ لنفسه ١٠٠ جنيه قبل التوزيع

(المتوسط الحسابى)

٣٧٦ ـ المتوسط الحسابى بين جملة كميات من نوع واحد هو خارج قسمة مجموعها على عددها

مثلا اذا دخل تلميذ فى امتحان وحصل على ١٨ درجة فى اللغـة العربيـة و ١٧ درجة فى علم الحساب و ١٦ درجة فى علم الجغرافيـة و ١٤ درجة فى الخط (بفرض ان أعلا درجة فى كل علم ٢٠) فيكون متوسط درجاته هو $\frac{١٨+١٧+١٦+١٤}{٤} = \frac{٦٥}{٤} =$ ١٦ و ٢٥

٣٧٧ ـ ويستعمل المتوسط الحسابى فى كثير من الاشياء كمعرفة متوسط مواليد أو وفيات مدينة فى مدة معينة أو متوسط درجة الحرارة أو البرودة فى مدة معينة أو متوسط محصول قطعة أرض محدودة وغير ذلك ولنوضح هذه القاعدة بمسائل فنقول

المسئلة الاولى — اذا كان ثمن الاردب القمح فى مصر فى زمن المحصول يساوى ١٠٠ قرش وفى أول الشتاء يساوى ١٢٠ قرشا وفى آخر الشتاء يساوى ١٥٥ قرشا فما متوسط ثمن الاردب

الحل — متوسط ثمن الاردب هو $\frac{١٥٥+١٢٠+١٠٠}{٣} = \frac{٣٧٥}{٣} =$ ١٢٥ قرشا

المسئلة الثانية — اذا كان مواليد مدينة فى شهر محرم ٢٥ نفسا وفى شهر صفر ٢٠ وفى شهر ربيع الاول ٢٨ وفى شهر ربيع الآخر ٢٣ وفى شهر جمادى الاولى ٢٧ وفى شهر جمادى الثانية ٢١ فما متوسط مواليد هذه المدينة فى هذه المدة

الحل — متوسط المواليد فى هذه المدة هو $\frac{٢١+٢٧+٢٣+٢٨+٢٠+٢٥}{٦}$
$= \frac{١٤٤}{٦} =$ ٢٤

المسئلة الثالثة — اذا كان محصول فدان قنطارين من القطن سنويا ثم بعمل اصلاح زراعى فى الارض أنتج الفدان فى السنين التالية ٣ قناطير ثم ٤ ثم ٦ فما متوسط محصول الفدان فى السنين الاربع

الحل — متوسط محصول الفدان هو $\frac{٦+٤+٣+٢}{٤} =$ ٣٫٧٥ قناطير

المسئلة الرابعة — اذا كانت درجة الحرارة فى مدينة مدة أسبوع ماخوذة فى الساعة التاسعة بالترمومتر المئينى هى ٢٠٫٥ و ٢٢ و °١٩ , ٢١ و °٢٢ , °٢٣ , °١٩٫٥ فما متوسط درجة الحرارة فى ذلك الاسبوع

الحل — متوسط درجة الحرارة فى ذلك الاسبوع هو $\frac{١٩٫٥+٢٢+٢٣+٢١+١٩+٢٢+٢٠٫٥}{٧} =$ ٢١ درجة

المسئلة الخامسة ـ تلميذ تاخر عن المدرسة ٥ أيام في شهر شوّال و ٤ أيام في شهر ذي القعدة و ٩ أيام في شهر ذي الحجة فما متوسط غيابه في هذه الاشهر الثلاثة

الجواب ـ متوسط غيابه هو $\frac{٥+٤+٩}{٣}$ = ٦ أيام

(مسائل على المتوسط الحسابي)

(٨٢٢) اذا كان ثمن الاردب من الفول في أربعة أسواق جهات من مركز واحد هو ١٥١ قرش و ١٢٠ قرشا و ١١٢ قرشا و ١١٧ قرشا فما متوسط ثمن الاردب

(٨٢٣) متوسط سن ٣ أشخاص ٢٨ سنة وسن أكبرهم ٤٠ سنة وسن الاصغر ١٨ سنة فما سن الثالث

(٨٢٤) متوسط الدرجتين اللتين نالهما محمود في امتحان الصرف والنحو هو ١٨ وكانت درجة النحو ٢٠ فما درجة الصرف

(٨٢٥) ما متوسط الحضور والغياب اليومى في مدة أسبوع لتلامذة مدرسة عددهم ٣٠٠ تلميذ ومقدار الغائبين منهم في أيام ذلك الاسبوع على التوالى هو ١٤ و ١٦ و ١٥ و ١٣ و ٨ و ٦

(٨٢٦) منزل أجر بمبلغ ٣٥٠ قرشا كل شهر لمدة ٤ أشهر ثم خلا من السكن مدة ١٠٥ شهر وأجر باقى السنة بمبلغ ٣٢٠ قرشا كل شهر فما متوسط ايراده في الشهر مع العلم بأنه صرف ٢٥٠ قرشا في اصلاحه في هذه السنة و ٣٥٠ قرشا ضرائب البلدية

(٨٢٧) ساع قطع ٥٨ كيلومتر في يوم و ٤٦ كيلومتر في يوم آخر و ٥٠ كيلومتر في يوم ثالث و ٣٦ كيلومتر في يوم رابع فما متوسط سيره اليومى

(الخلط والمزج)

٣٧٨ ـ الغرض من قاعدة الخلط والمزج هو إما تعين الثمن المتوسط لجملة أشياء مخلوطة أو ممزوجة بعد معرفة مقدار كل نوع وثمنه

وإما تعين النسبة التى يتركب على حسبها مخلوط أو ممزوج من أنواع معلومة الاثمان بحيث يكون الثمن المتوسط للمخلوط معلوما

٣٧٩ ـ الحالة الاولى ـ قاعدة لتعين الثمن المتوسط لجملة أشياء مخلوطة أوممزوجة بعد معرفة مقدار كل منها وثمن وحدته يضرب مقدار كل نوع فى ثمن وحدته وتجمع حواصل الضرب ويقسم مجموعها على على مجموع المقادير المخلوطة أوالممزوجة فالخارج هوالثمن المتوسط المطلوب ولنوضح ذلك بمسائل فنقول

المسئلة الاولى ـ تاجر خلط ١١٠ أرادب من القمح الذى ثمن الاردب منه ١٢٠ قرشا مع ٢٠ ثمن أردبا من القمح الذى ثمن الاردب منه ١١٠ قرشا ومع ١٠ أرادب من القمح الذى ثمن الاردب منه ١١٢ قرشا فما ثمن الاردب من المخلوط

الحل ـ ثمن ١١٠ أرادب بسعر ١٢٠ هو ١٢٠ × ١١٠ = ١٣٢٠٠

و « ٢٠ « « « ١١٠ « ١١٠ × ٢٠ = ٢٢٠٠

و « ١٠ « « « ١١٢ « ١١٢ × ١٠ = ١١٢٠

فاذا يكون ثمن مجموع هـذه الارادب وهو ١٤٠ = ١٦٥٢٠

وحينئذ يكون ثمن الاردب الواحد من المخلوط هو $\frac{١٦٥٢٠}{١٤٠}$ = ١١٨ .

المسئلة الثانية ـ مزج ٧ لترات من سائل ثمن اللتر منه ١٨ قرشا مع ٦ لترات من سائل آخر ثمن اللتر منه ١٤ قرشا ومع ٣ لترات من سائل ثالث ثمن اللتر منه ١٠ قروش فما ثمن اللتر من هذا الممزوج

الحل ـ ثمن ٧ لترات من سائل ثمن اللتر منه ١٨ هو ١٨ × ٧ = ١٢٦

و « ٦ « « « « ١٤ هو ١٤ × ٦ = ٨٤

و « ٣ « « « « ١٠ هو ١٠ × ٣ = ٣٠

ويكون ثمن مجموع هذه اللترات وهو ١٦ = ٢٤٠

وحينئذ يكون ثمن اللتر من الممزوج = $\frac{٢٤٠}{١٦}$ = ١٥ قرشا

المسـئلة الثالثة ـ شخص أضاف ١٢ أقة من المـاء على ٦٠ أقة من الخل الذى ثمن الاقة منه ١,٥ قرشا فما ثمن الاقة من الممزوج

الحل ـ يلاحظ أن المـاء لاثمن له وحينئذ يكون ثمن الممزوج هو ١,٥ × ٦٠ = ٩٠ قرشا وحيث أن وزنه ٦٠ + ١٢ أى ٧٢ أقة يكون ثمن الاقة هو $\frac{٩٠}{٧٢}$ = ١,٢٥ قرشا

الحالة الثانية وفيها صورتان

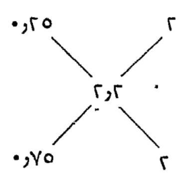
٣٨٠ ـ الصورة الاولى ـ أن يكون المطلوب تعين النسبة التى يتركب على حسبها مخلوط أو ممزوج من نوعين بعد معرفة ثمن الوحدة من كل منهما والثمن المتوسط فالقاعدة فى ذلك أن يطرح الثمن الاقل من الثمن المتوســط فالباقى يدل على مايلزم أخذه من النوع ذى الثمن الاعلى ثم يطرح الثمن المتوسط من الثمن الاعلى والباقى يدل على مايلزم أخذه من النوع ذى الثمن الادنى

تنبيه ـ الباقيان المذكوران هما حدا النسبة المطلوبة وهى لاتتغير بضربهما فى عددمّا أو قسمتهما كذلك

ولنضرب لذلك مثلا بحل المسئلة الآتية فنقول

مسئلة ــ على اى نسبة يتركب مخلوط من نوعين من الدقيق ثمن الاقة من أحدهما قرشان وثمن الاقة من الثـانى ثلاثة قروش بشرط أن يكون ثمن الاقة من المخلوط ٢,٢٥

الحل ــ نطرح الثمن الادنى ٢ من الثمن المتوسط ٢,٢٥ يبقى ٠,٢٥ فنضعه أمام الثمن الاعلى ثم نطرح الثمن المتوسط ٢,٢٥



من الثمن الاعلى ٣ يبقى ٠,٧٥ فنضعه أمام الثمن الادنى فالعـددان ٠,٢٥ و ٠,٧٥ يدلان على مايلزم أخذه من النوعين المذكورين وهما حدّا النسـبة التى يتركب على حسبها المخلوط وهـذه النسـبة لاتتغـير اذا ضرب الحدان فى عددمّا أو قسما على أى عدد وحينئـذ فلنا أن ناخذ ٢٥ أقة من الاول و ٧٥ من الثـانى أو ٥٠ أقة من الاول و ١٥٠ من الثـانى وهكذا

ولتحقيق المسئلة يقال انه اذا بيعت أقة من الدقيق الاول بالثمن المتوسـط كانت الخسارة ٣ ــ ٢,٢٥ = ٠,٧٥ وخسـارة ٠,٢٥ من الاقة هى ٠,٧٥ × ٠,٢٥ = ٠,١٨٧٥ من القرش واذا بيعت أقة من الدقيق الثانى بالثمن المتوسط كان المكسب ٢,٢٥ ــ ٢ = ٠,٢٥ ومكسب ٠,٧٥ من الاقة هو ٠,٢٥ × ٠,٧٥ = ٠,١٨٧٥ من القرش وهو قدر الخسارة التى نشات من النوع الاول وحينئذ فقـد حصـل التعادل

٣٨١ ـ الصورة الثانيــة أن يكون المطلوب تعين المقادير التى يتركب على حسـبها مخلوط أو ممزوج من جملة أنواع بعـد معرفة ثمن الوحدة من كل منها والثمن المتوسط ففى هـذه الصورة تكون المسئلة غير معينة الحل (أى لهـا جملة حلول) ومع ذلك فللحل طريقتان

الطريقــة الاولى ـ أن نقارن الاثمـان مثنى بالثمن المتوسط بشرط أن تحتوى كل مقارنة على ثمن فوق الثمن المتوسط وآخر دونه ونضع فرقى المقـارنة أمام الثمنين على التعاكس فتنتج المقادير المطلوبة ولزيادة الايضاح نحل المسئلة الآتية

مسئلة ـ المطلوب تعين المقادير التى تؤخذ من خمســة أنواع من الزيت ثمن الرطل من النوع الاول ٢٥ مليما ومن الثـانى ٢٠ مليما ومن الثـالث ١٨ مليما ومن الرابع ١٤ مليما ومن الخامس ١٢ مليما لتركيب ممزوج يكون ثمن الرطل منه ١٧ مليما

المتوسط	الأثمان	الفروق
١٧	٢٥	٥
	٢٠	٥
	١٨	٣
	١٤	١
	١٢	٨ + ٣

الحل ـ نقارن الثمنـين ٢٥ و ١٢ بالثمن المتوسـط ١٧ ونضع الفرقين ٨ و ٥ أمام الثمنـين على التعاكس ثم نقارن الثمنين ١٨ و ١٤ بالثمن المتوسط ١٧ ونضع الفرقين ٣ و ١ أمام الثمنــين على التعاكس ثم نقارن الثمنين ٢٠ و ١٢ بالثمن المتوســط ١٧ ونضع الفرقين ٥ و ٣ أمام الثمنين على التعاكس فالاعداد ٥ و ٥ و ٣ و ١ و (٨ + ٣) أى ١١ تدل على عدد الارطال التى تؤخذ من الانواع التى وضعت هــذه المقادير أمام أثمـانها

وليتنبه الطالب الى أنه يمكن اجراء المقارنة بين هـذه الاثمـان على خلاف هذا الترتيب فيمكن أن يقارن بين ٢٥ و ١٤ و بين ٢٠ و ١٢ ثم بين ١٨ و ١٤ أو بين ١٨ و ١٢ وهكذا

وعلى العموم فالمقادير التى تنتج من المقارنة باى كيفيـة تعتبر مقادير أساسية لتعـين النسب بين الانواع وحينئذ فيصح ضربها فى عددمّا أو قسمتها على أى عدد

الطريقة الثانيـة ــ نفرض تركيب ممزوجين من الانواع المعلومة أحدهما من الانواع التى ثمن وحداتها فوق الثمن المتوسط والآخر من الانواع التى ثمن وحداتهـا دون الثمن المتوسط ثم نبحث عن الثمن المتوسـط لكل من الممزوجين ونقارن الثمنين المتوسطين المذكورين بالثمن المتوسط الاصلى فينتج مقدار مايلزم أخذه من كل منهما ثم نقسم كلا من هذين المقدرين الى أقسام متساوية بقدر عدد أنواعه ولنوضح هذه الطريقة بحل المسئلة الآتية

مسئلة ــ المطلوب تعيين المقادير التى يلزم أخذها من أربعة أنواع من شراب الورد وثمن اللتر من النوع الاول ١٨ قرشا ومن الثانى ١٤ قرشا ومن الثالث ١٠ قروش ومن الرابع ٧ قروش لتركيب ممزوج ثمن اللتر منه ١٢ قرشا

فلذلك يقال اذا مزج لترمـا ثمنه ١٨ قرشا مع لترما ثمنه ١٤ قرشا يكون الثمن المتوسط للتر ١٦ قرشا واذا مزج لترما ثمنه ١٠ قروش مع لترمـا ثمنه ٧ قروش يكون الثمن المتوسط للتر ٨,٥ قروش ثم بمقارنة

هذين الثمنين أى ١٦ و ٨,٥ بالثمن المتوسط الاصلى ١٢ نجد أن مايؤخذ من الاول ٣,٥ لترات ومايؤخذ من الثـانى ٤ لترات ثم نقسم ٣,٥ الى أقسام بقــدر أنواعه أى ٢ فينتج ١,٧٥ وهو مايلزم أخذه من كل من النوعين اللذين ثمن كل منهما فوق الثمن المتوسط وكذلك يقسم المقدار الثانى ٤ الى قسمين فينتج لتران وهما مقدار مايلزم أخذه من كل واحد من النوعين الآخرين

٣٨٢ ـ تنبيهان (الاول) قد يراد تركيب ممزوج ذى مقدار معين من نوعين أو أنواع معلومة الاثمان بحيث يكون ثمن وحدته معلوما

والطريقــة فى ذلك أنه بعــد ايجاد المقادير التى يتركب على حسبها الممزوج يقسم المقدار المعين الى جزأين أو أجزاء مناسبة لهذه المقادير

مثلا اذا أريد أن يكون مقــدار الممزوج فى المسئلة السابقة ٦٠ لترا فانه بعــد ايجـاد المقادير التى يتركب على حسبها الممزوج وهو ١,٧٥ و ١,٧٥ و ٢ و ٢ يقسم ٦٠ لترا الى أجزاء مناسـبة لهذه المقادير فينتج أن مايقابل كلا من الاول والثانى ١٤ لترا وما يقابل كلا مع الثـالث والرابع ١٦ لترا

(الثـانى) ـ قد يراد تركيب ممزوج من نوعين معلومى الثمن بحيث أن يدخل فيه مقدار معين من أحدهما و يكون الثمن المتوسط معلوما

والطريقة فى ذلك انه بعــد تعيين النسبة التى يتركب على حسبها الممزوج تركب مســئلة من القاعدة الثلاثية البســيطة فيها حدا النسبة مقداران متناظران وفيها المقدار المعين والمقدار المراد تقديره من النوع الثانى مقداران متناظران أيضا ولنوضح ذلك بالمسئلة الا تية

مسـئلة يراد عمل ممزوج من نوعين من الشراب ثمن اللتر من النوع الاول ١٢ قرشا وثمن اللتر من الثـانى ٥ قروش بحيث يكون ثمن اللتر من الممزوج ١٠ قروش وأن يدخل فيه ١٨ لترا من النوع الاول

الحل ـ نبحث أولا عن النسبة التى يتركب على حسبها الممزوج فينتج أن حديها ٥و٢ ثم تركب مسئلة القاعدة الثلاثية البسيطة الآتية

اذا أريد تركيب ممزج من نوعين من السائل على نسـبة ٥ الى ٢ ووضع فى هذا الممزوج ١٨ لترا من الاول فما مقدار مايوضع فيه من الثانى وبحلها يرى انه يلزم وضع ٢و٧ لترات من الثانى

٣٨٣ ـ سبك المعادن ـ قاعدة الخلط والمزج السابقة بانواعها تستعمل فى سبك المعادن غير أنه يحل العيار محل الثمن

ولنمثل لذلك بحل المسائل الآتية فنقول

المسئلة الاولى ـ صائغ سبك قطعتين من الذهب عيار الاولى ٠,٨٧٥ ووزنها ٣٦ قيراطا وعيار الثـانية ٠,٧٥٠ ووزنها ١٢ قيراطا فما عيار السبيكة

الحل ـ الذهب الصافى فى الاولى ٠,٨٧٥ × ٣٦ = ٣١,٥ قيراطا

والذهب الصافى فى القطعة الثانية ٠,٧٥٠ × ١٢ = ٩ قراريط

وحينئذ فمقدار الذهب الصافى فى القطعتين هو ٣١,٥ + ٩ = ٤٠,٥

وبقسمته على مجموع الوزنين ٤٨ ينتج ٠,٨٤٣٧٥ أو ٠,٨٤٤ تقريبا وهو العيار المطلوب

المسئلة الثانية ــ مامقدار مايلزم أخذه من سبيكتين من الفضة عيار الاولى ٠٫٨٠٠ وعيار الثانية ٠٫٩٠٠ لعمل كيلو جرام من الفضة يكون عياره ٠٫٨٧٥

الحل ــ نطرح العيار الاقل ٠٫٨٠٠ من العيار المتوســط ٠٫٨٧٥ ينتج ٠٫٠٧٥ ثم نطرح العيار المتوســط ٠٫٨٧٥ من العيار الاعلى ٠٫٩٠٠ فيبقى ٠٫٠٢٥ ثم يقسم كيلو جرام أى ١٠٠٠ جرام الى جزأين مناســبين للعددين ٠٫٠٧٥ و ٠٫٠٢٥ فينتج ٧٥٠ جراما وهو مايؤخذ من السبيكة التى عيارهـا ٠٫٩٠٠ و ٢٥٠ جراما وهو مايؤخذ من التى عيارها ٠٫٨٠٠

المســئلة الثالثــة ــ ماالذى يلزم اضافته من فضة عيارها ٠٫٩٠٠ على ٢٦٠ درهما من فضة عيارها ٠٫٧٥٠ بحيث يكون عيار السبيكة ٠٫٨٣٥

الحل ــ نبحث أولا عن النســبة التى تتركب على حسبها السبيكة فنجد أنها تتركب من ٠٫٠٨٥ من التى عيارهـا ٠٫٩٠٠ ومن ٠٫٠٦٥ من التى عيارهـا ٠٫٧٥٠ ثم يســتخرج المقدار المطلوب من الوضع الآتى

٠٫٠٦٥	٢٦٠	ومنه ينتج أن مقدار س = ٣٤٠
٠٫٠٨٥	س	

فالعدد ٣٤٠ درهما يدل على مايلزم اضافتــه من الفضة التى عيارها ٠٫٩٠٠

مسائل على الخلط والمزج وسبك المعادن

(٨٢٨) خلط ١٧ رطلا من بن سعر الرطل منه ٤٫٢ قروش مع ٢٥ رطلا من بن سعر الرطل منه ٣٫٦ قروش فما ثمن الرطل من المخلوط

(٨٢٩) خلط ٩ أقات من شاى ثمن الاقة منه ٦ ف مع ٦ أقات من شاى آخر ثمن الاقة منه ٢٫٧ ف ومع ٣ أقات من شاى ثالث ثمن الاقة منه ١٢ ف فما ثمن الاقة من المخلوط

(٨٣٠) مزج ٥ لترات من سائل ثمن اللتر منه ٠٫٩٦ ف مع ١٥ لترا من سائل ثمن اللتر منه ٠٫٨٠ ف ومع ٢٠ لترا من سائل ثالث ثمن اللتر منه ٠٫٧٠ ف فما ثمن اللتر من الممزوج

(٨٣١) خابية تسع ٢٢٨ لترا وضع فيها ٥٥ لترا من خل ثمن اللتر منه ٠٫٣٨ ف و ٦٠ لتر من خل آخر ثمن اللتر منه ٠٫٣٥ ف و ٣٠ لترا من خل ثالث ثمن اللتر منه ٠٫٣٢ ف و ٤٥ لترا من خل ثمن اللتر منه ٠٫٣٠ ف ثم كملت بالماء فما ثمن ديكالتر من الممزوج

(٨٣٢) اذا سبك ١٢ مثقالا من الذهب الذى عياره ١٨ مع ١٠ مثاقيل من ذهب عياره ٢١ ومع ٦ مثاقيل من ذهب عياره ٢٣٫٥ فما يكون عيار السبيكة

(٨٣٣) بأى نسبة يخلط أرز ثمن الربع منه ١٢ قرشا مع أرز آخر ثمن الربع منه ٨ قروش ليكون ثمن الربع من المخلوط ٩ قروش

(٨٣٤) بأى نسبة يمزج شراب ثمن اللتر منه ٦٥ سنتيما مع شراب آخر ثمن اللتر منه ٨٥ سنتيما ليتكون ممزوج ثمن اللتر منه ٧٥ سنتيما

(٨٣٥) بأى نسبة يلزم سبك ذهب عياره ٠٫٩٠٠ مع نحاس ليكون العيار ٠٫٨٢٠

(٨٣٦) مامقدار مايؤخذ من كلا نوعين من الشاى ثمن الكيلوجرام من الاول ٤٫٨٠ ف ومن الثانى ٦ ف للحصول على ٤٥ هكتوجرام من مخلوطهما يكون ثمن الكيلوجرام منه ٥ ف

(٨٣٧) شخص عنــده نوعان من شراب الرمان ثمن اللتر من أحدهما ٣٫٤٥ ف وثمن اللتر من الآخر ٣٫٦٠ ف ويراد أن يكون من ممزوجهما ٦٦ لترا ثمنها ٢٣١ ف فما مقدار مايؤخذ من كل نوع

(٨٣٨) كم كيلوجراما تؤخذ من النحاس ومن الخارصين لسبك ١٢ كيلوجرام من النحاس الاصفر بعــد معرفة أن النحاس الاصفر يتركب من ٧٥ جزأ من النحاس و٢٥ جزأ من الخارصين

(٨٣٩) كم أردبا من القمح الذى ثمن الاردب منه ١١٠ قرش يضاف على ٢٠ اردبا من قمح ثمن الاردب منه ١٣٢ قرشا ليكون ثمن الاردب من المخلوط ١٢٥ قرشا

(٨٤٠) مامقدار مايلزم اضـافته من شراب ثمن اللتر منه ٧٥ سنتيما الى ٢٤٠ لترا من شراب آخر سعر اللتر منه ٨٤ سنتيما ليتكون شراب سعر اللتر منه ٨٠ سنتيما

(٨٤١) كم مثقالا من الذهب الخالص يضاف على قطعة ذهب عيارها ١٨ ووزنها ١٠ مثاقيل حتى يكون عيار السبيكة ٢١

(٨٤٢) تاجر يريد أن يكون مخلوطا من القمح مقــداره ١٢٦ أردبا من ثلاثة أنواع ثمن الاردب من أحدها ١٣٠ قرشا ومن الثانى ١٢٠ قرشا ومن الثالث ١١٢ قرشا بحيث يكون ثمن الاردب من المخلوط ١٢٥ قرشا

(٨٤٣) المطلوب ملء زجاجة تسع لترا من أربعة أنواع من السائل ثمن اللتر من الاول ٥ ف ومن الثانى ٤ ف ومن الثالث ٣٫٥ ف ومن الرابع ٢٫٥ ف بحيث يكون ثمنها ٣ فرنكات فما مقدار مايؤخذ من كل نوع

(٨٤٤) المطلوب عمل سبيكة يكون وزنها ٤٠٠ درهم وعيارها ٠٫٨٠٠ من أربع سبائك عيار احداها ٠٫٩٠٠ والثانية ٠٫٨٨٠ والثالثة ٠٫٧١٠ والرابعة ٠٫٦٧٠ فامقدار مايؤخذ من كل سبيكة

(٨٤٥) مامقــدار مايلزم اضافته من الماء الذى بلغت درجة حرارته ١٠٠ من الترمومتر المئينى الى ٢٣٠٠ لتر من الماء الذى درجة حرارته ١٢ لترى الماء فى درجة ٣١

المتواليات العددية

٣٨٤ ـ المتوالية العددية هى جملة أعدادٍ متتالية يزيد او ينقص كل منها عن سابقه بعدد ثابت يسمى أساس المتوالية.

اذا كانت الاعداد المركبة منها المتوالية آخذة فى الزيادة تسمى متوالية تصاعدية واذا كانت آخذة فى النقص تسمى متوالية تنازلية

فالاعداد ٣ و ٥ و ٧ و ٩ و ١١ يتركب منها متوالية عددية تكتب هكذا

÷ ٣ . ٥ . ٧ . ٩ . ١١ وتسمى متوالية عددية تصاعدية أو تكتب هكذا

÷ ١١ . ٩ . ٧ . ٥ . ٣ وتسمى متوالية عددية تنازلية

وتقرأ الاولى نسبة ٣ الى ٥ كنسبة ٥ الى ٧ كنسبة ٧ الى ٩ كنسبة ٩ الى ١١

وتقرأ الثانية نسبة ١١ الى ٩ كنسبة ٩ الى ٧ كنسبة ٧ الى ٥ كنسبة ٥ الى ٣

وكل عدد منها يسمى حدا والفرق بين أى حدّين متتاليين مثل ٥ و ٧ وهو ٢ يسمى أساس المتوالية

٣٨٥ ـ يؤخذ من تعريف المتوالية العددية ان كانت تصاعدية أن أىّ حد منها يساوى الحد الذى قبله زائد الاساس وان كانت تنازلية أن أى حد منها يساوى الحد الذى قبله ناقصا الاساس

فاولا ــ فى المتوالية ÷ ٣ . ٥ . ٧ . ٩ . ١١ يكون

٥ = ٣ + ٢

و ٧ = ٥ + ٢ = ٣ + ٢ + ٢ = ٣ + ٢ × ٢

و ٩ = ٧ + ٢ = ٣ + ٢ × ٢ + ٢ = ٣ + ٢ × ٣

و ١١ = ٩ + ٢ = ٣ + ٢ × ٣ + ٢ = ٣ + ٢ × ٤

ومن هنا ينتج أن كل حد من المتواليــة العددية التصاعدية يساوى الحد الاول زائدا حاصــل ضرب الاساس فى عدد الحدود التى قبــل ذلك الحد

وثانيا ــ فى المتوالية التنازلية ÷ ١١ . ٩ . ٧ . ٥ . ٣ يكون

٩ = ٢١ − ٢

و ٧ = ٩ − ٢ = ١١ − ٢ − ٢ = ١١ − ٢ × ٢

و ٥ = ٧ − ٢ = ١١ − ٢ × ٢ − ٢ = ١١ − ٢ × ٣

و ٣ = ٥ − ٢ = ١١ − ٢ × ٣ − ٢ = ١١ − ٢ × ٤

ومن هنا ينتج أن كل حد من المتواليــة العددية التنازليــة يساوى الحد الاول ناقصا حاصل ضرب الاساس فى عدد الحدود التى قبــل ذلك الحد

٣٨٦ ــ تنبيــه (١) ماتقدم ذكره بخصوص مقــدار أى حد من المتوالية التصاعدية أو التنازليــة يمكن تطبيقه على الحد الاخير غير أنه لمــا كانت الحدود التى قبــله عبارة عن جميع حدود المتواليــة ماعداه يقــال

الحد الاخير من المتوالية العددية يساوى الحد الاول مضافا اليه أو مطروحا منه حاصل ضرب الاساس فى عدد حدود المتوالية ناقصا واحدا

واذا رمز للحد الاول بحرف ا وللاخير بحرف ل وللاساس بحرف س ولعدد حدود المتوالية بحرف ن يكون

فى المتوالية التصاعديه ل = ا + س (ن − ١) ١

وفى المتوالية التنازلية ل = ا − س (ن − ١) ٢

٣٨٧ ــ تنبيه (٢) من المتساوية الاولى يمكن استخراج الاساس اذا بطرح الحد الاول ا من طرفيها يحدث

ل − ا = س (ن − ١)

ثم بقسمة طرفى هذه المتساوية على ن − ١ يحدث:

(ل − ا) / (ن − ١) = س

أعنى أن الاساس يساوى الفرق بين الطرفين مقسوما على عدد الحدود ناقصا واحدا

٣٨٨ ــ ادخال الاوساط بين عددين معلومين ــ ادخال الاوساط بين عددين معلومين هو عبارة عن تكوين متوالية عددية يكون العددان المعلومان طرفين لها والاوساط المطلوبة حدودا متوسطة فاذا أريد ادخال خمسة أوساط بين العددين ٣ و ٢٧ لزم إستخراج الاساس ولذلك يقال اذا اعتبرنا أن المتوالية تصاعدية يكون ٣ هو الحد الاول

و ٢٧ هو الحد الاخير وبنـاء على ماتقـدم بنمرة ٣٩٦ يكون الاساس يساوى الفرق بين الحد الاخير والاول مقسوما على عدد الحدود ناقصا واحدا (وعدد الحدود ناقصا واحدا هو عبارة عن عدد الاوساط زائدا واحدا) فاذا رمزله بحرف س يحدث س $= \frac{٢٧ - ٣}{٥ + ١} = \frac{٢٤}{٦} = ٤$

وحينئذ يمكن تركيب المتوالية هكذا

$$\div ٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٧$$

٣٨٩ ـ يمكن ادخال أوسـاط متحدة العـدد بين كل حدّين متتاليين من متوالية عددية ويتركب من الجميع متواليـة عددية أساسها يساوى أساس المتوالية الاصلية مقسوما على عدد الاوساط التى أدخلت بين كل حدّين زائدا واحدا

فاذا أريد ادخال أربعة أوساط بين كل حدّين متتاليين من المتوالية

$$\div ٣ ، ١٣ ، ٢٣ ، ٣٣ ، ٤٣$$

يعتبر أن كل حدّين متتاليين هما طرفا متوالية جزئية وتكون أساسات المتواليات الجزئية هى

$$\frac{١٣ - ٣}{٤ + ١} ، \frac{٢٣ - ١٣}{٤ + ١} ، \frac{٣٣ - ٢٣}{٤ + ١} ، \frac{٤٣ - ٣٣}{٤ + ١}$$

وهـذه الاساسات كلها متساوية اذ مقاماتها متساوية (كل مقام هو عدد الاوساط المراد ادخالها بين كل حدين زائدا واحدا) وبسوطها متساوية (كل بسط هو الفرق بين حدّين متتاليين من المتوالية الاصلية أى أساسها) وبحساب كل منها نجد أنه يساوى ٢ وبواسطته نتكوّن اربع متواليات جزئية وحيث كان الحد الاخير من المتواليـة الجزئيـة

الاولى هو الحد الاول من الثانية والحد الاخير من الثانيـة هو الاول من الثالثة وهكذا يمكن وصل هذه المتواليات ببعضها وينتج منها متوالية واحدة وهى .

÷ ٣ ° ٥ ° ٧ ° ٩ ° ١١ ° **١٣** ° ١٥ ° ١٧ ° ١٩ ° ٢١ ° **٢٣**
° ٢٥ ° ٢٧ ° ٢٩ ° ٣١ ° **٣٣** ° ٣٥ ° ٣٧ ° ٣٩ ° ٤١ ° **٤٣**

التى أساسها ٢ وهو مساو لخارج قسمة أساس المتوالية المفروضة ١٠ على عدد الاوساط التى أدخلت بين كل حدين

٣٩٠ ـ مجموع كل حدّين متحدى الرتبة من الطرفين يساوى مجموع الطرفين

ففى المتواليـة ÷ ٥ ° ٨ ° ١١ ° ١٤ ° ١٧ ° ٢٠ ° ٢٣ مجموع الحـدّين ١١ و ١٧ (اللذين كل منهـما هو الثالث بالنسـبة لطرف) يساوى مجموع الطرفين ٥ و ٢٣

وذلك لانه حيث كان ١١ هو الحد الثالث من المتواليـة يكون بناء على ماتقدم بنمرة (٣٩٥) ١١ = ٥ + ٢ × ٣ (١)

والحد ١٧ يمكن اعتباره حدّا ثالثا من متوالية تنازليـة حدّها الاول ٢٣ وأسـاسها ٣ ويكون ١٧ = ٢٣ − ٣ × ٣ (٢) وبجمع المتساويتين (١) و (٢) ينتج ١١ + ١٧ = ٥ + ٢ × ٣ + ٢٣ − ٢ × ٣ أو ١١ + ١٧ = ٥ + ٢٣

تنبيـه بالقياس على ماتقدّم يسهل بيـان مساواة الحد المتوسـط (فى المتوالية التى عدد حدودها فردى) لنصف مجموع الطرفين

٣٩١ ـ مجموع حدود المتواليـة العددية يساوى مجموع طرفيها مضروبا فى نصف عدد الحدود

مثــلا فى المتوالية ÷ ٥ ٫ ٨ ٫ ١١ ٫ ١٤ ٫ ١٧ ٫ ٢٠ اذا رمز لمجموع حدودها بحرف ع يكون ع = (٥ + ٢٠) × $\frac{٦}{٢}$ وذلك لانه لمـا كان ع رمزا لمجموع الحدود يكون

ع = ٥ + ٨ + ١١ + ١٤ + ١٧ + ٢٠ (١)

واذا عكس وضع هذه المتوالية تحدث المتوالية التنازلية

÷ ٢٠ ٫ ١٧ ٫ ١٤ ٫ ١١ ٫ ٨ ٫ ٥

التى حدودها عين حدود الاولى ويكون ضرورة مجموع حدودها هو نفس مجموع حدود الاولى أى

ع = ٢٠ + ١٧ + ١٤ + ١١ + ٨ + ٥ (٢)

ثم اذا جمعنا متساويتى (١) و (٢) يحدث ٢

ع = (٥ + ٢٠) + (٨ + ١٧) + (١١ + ١٤) + (١٤ + ١١) + (١٧ + ٨) + (٢٠ + ٥) وحيث ان هذه المجموعات الجزئيــة متساوية لان كلا منها يساوى مجموع الطرفين (كما فى نمرة ٤٠٠) يؤخذ أحدها ويضرب فى عددها ويكون ٢ ع = (٢٠ + ٥) × ٦ وبقسمة طرفى هذه المتساوية على ٢ يحدث

ع = $\frac{(٢٠ + ٥) \times ٦}{٢}$ أو (٢٠ + ٥) × $\frac{٦}{٢}$ وهو المطلوب

مسائل على المتواليات العددية

(٨٤٦) مامقدار الحد الثالث والخمسين من متوالية عددية تنازلية حدها الاول ٢٧ وأساسها نصف

(٨٤٧) ماأساس متواليـــة عددية حدها الاول واحد والاخـير ٢٧ وعدد حدودها ١٤

(٨٤٨) ماجموع الاعداد الصحيحة من واحد الى الف

(٨٤٩) ماجموع الستين حد الاول من متوالية عددية حدها الاول ٥ واساسها اثنـان

(٨٥٠) كم عدد حدود المتواليـــة التى مجموع حدودها ٣١٥ وحدها الاول ٧ والاخير ٣٥

(٨٥١) خيول مختلفة الاثمـان ثمن كل حصان يزيد عن الاقل منه ثمنا بمقـدار ٣٣٠ وأقل الاثمـان ٧٥٠ قرشا فما ثمن الحصان الخامس عشر

(٨٥٢) خادم ابتدأ فى الخدمة بمرتب سنوى قدره ١٩٢ قرشا ولامانته واجتهاده كان يكافأ كل سـنة بزيادة راتبه بمقدار ثابت و بعد ١٧ سنة وجد أن ماأخذه فى هذه المدة ٦٥٢٨ قرشا المطلوب معرفة ماوصل اليه مرتبه فى السـنة السابعة عشرة ومقدار مكافأة فى كل سنة

(٨٥٣) ساعة تدق الساعات والانصاف فما عدد دقاتها فى ٢٤ ساعة

(٨٥٤) فرقة من الفعـلة اتفقت مع شخص على حفر بئر بأجرة الذراع الاول فى العمق ١٠ قروش وان تزاد أجرة كل ذراع عن سابقه بمقـدار خمسة قروش فما مقدار مايستحقه اذا بلغ عمق البئر ١٤ ذراعا

(٨٥٥) فرش طريق برمل وكان محل الرمل متباعدا عن أول الطريق بمقـدار ٢٠ مترا والعامل المكلف بالنقل كان يضع كل نقلة فى أول كل ثلاثة أمتار من الطريق وكان ماقطعه فى ذهابه آخر نقلة هو ٩٢ مترا والمطلوب أولا معرفة عدد النقلات ثانيا طول الطريق ثالثا ماقطعه العامل فى الذهاب والاياب مبتدئا من محل الرمـل رابعا الزمن الذى استغرقه فى ذلك مع مراعاة أنه يمشى ٥٠ مترا فى الدقيقه وأنه يحتاج الى ٥ دقايق فى رفع الرمل وتفريغه فى كل مرة

المتواليـات الهندسية

٣٩٢ ـ المتواليـة الهندسـية هى جملة أعداد متتالية اذا قسم اى عدد منها على الذى قبله يكون الخارج عددا ثابتا يسمى الاساس

اذا كان الاساس أكبر من الواحد تسمى المتواليـة تصاعدية واذا كان أصغر من الواحد فالمتوالية تنازلية

مثلا الاعداد ٤ و ١٢ و ٣٦ و ١٠٨ و ٣٢٤ يتركب منها متواليـة تكتب هكذا

∵ ٤ : ١٢ : ٣٦ : ١٠٨ : ٣٢٤ وتسمى متوالية تصاعدية

واذا كتبت هكذا ∵ ٣٢٤ : ١٠٨ : ٣٦ : ١٢ : ٤ تسمى متوالية تنـازلية

وتقرأ الاولى نسبة ٤ الى ١٢ كنسبة ١٢ الى ٣٦ كنسبة ٣٦ الى ١٠٨ كنسبة ١٠٨ الى ٣٢٤

وتقرأ الثانية نسبة ٣٢٤ الى ١٠٨ كنسبة ١٠٨ الى ٣٦ وهكذا

وكل عدد منها يسمى حدا وخارج قسمة أى حد مثل ١٠٨ من الاولى على سابقـه ٣٦ يساوى ٣ ويسمى أساسها وخارج قسمة أى حد مثل ١٠٨ من الثانية على سابقه ٣٢٤ يساوى $\frac{1}{3}$ ويسمى أساسها

٣٩٣ ـ يؤخذ من تعريف المتوالية الهندسية أن أى حد منها يساوى الحد الذى قبله مضروبا فى الاساس

ففى المتواليـة ∵ ٣ : ٦ : ١٢ : ٢٤ : ٤٨ : ٩٦ التى أساسها ٢ يكون

$$٦ = ٣ \times ٢$$
$$١٢ = ٦ \times ٢ = ٣ \times ٢ \times ٢ = ٣ \times ٢^{٢}$$
$$٢٤ = ١٢ \times ٢ = ٣ \times ٢^{٢} \times ٢ = ٣ \times ٢^{٣}$$
$$٤٨ = ٢٤ \times ٢ = ٣ \times ٢^{٣} \times ٢ = ٣ \times ٢^{٤}$$
$$٩٦ = ٤٨ \times ٢ = ٣ \times ٢^{٤} \times ٢ = ٣ \times ٢^{٥}$$

ومن هنا ينتج أن كل حد من حدود المتوالية الهندسية يساوى حاصل ضرب الحد الاول في الاساس مرفوعا الى قوّة بقدر عدد الحدود التى قبل ذلك الحد

٣٩٤ ـ تنبيه (١) ماتقدم ذكره بخصوص مقدار أى حدّ من حدود المتوالية الهندسية يمكن تطبيقه على الحد الاخير غير انه لما كانت الحدود التى قبله عبارة عن جميع حدود المتوالية ماعداه يقال

الحد الاخير من المتوالية الهندسية يساوى حاصل ضرب حدها الاول في الاساس مرفوعا الى درجة بقدر عدد حدود المتوالية ناقصا واحدا

واذا رمز للحد الاخير بحرف ل وللاول بحرف ا وللاساس بحرف س ولعدد الحدود بحرف ن فيكون $ل = ا \times س^{ن-١}$

٣٩٥ ـ تنبيه (٢) يمكن استخراج مقدار الاساس من قانون الحد الاخير اذ بقسمة طرفى المتساوية على ا يحدث

$\frac{ل}{ا} = س^{ن-١}$ ثم اذا أخذ جذر الطرفين بدرجة بقدر ن ـ ١ يكون $س = \sqrt[ن-١]{\frac{ل}{ا}}$

فاذا كان دليل الجذر ن — ١ = ٢ أو ٣ أمكن بالسهولة استخراج مقدار س باخذ الجذر التربيعى أو التكعيبى لخارج قسمة ل على أ

واذا كان دليل الجذر ٤ أمكن ايجاد مقدار س باستخراج الجذر التربيعى للخارج المذكور ثم ايجاد الجذر التربيعى لناتج الجذر واذا كان دليل الجذر ٦ فانه يؤخذ الجذر التربيعى للخارج المذكور ثم الجذر التكعيبى للناتج وعموما متى كان دليل الجذر مساويا لحاصل ضرب جملة أعداد لاتخرج عن ٢ أو ٣ أو هما معا سواء كانا مكررين أو غير مكررين فانه تؤخذ الجذور التربيعية على التوالى لخارج قسمة ل على أ وللنواتج مرارا بقدر دخول ٢ فى الدليل المذكور ثم تؤخذ الجذور التكعيبية للناتج وللنواتج التى تظهر على التوالى مرارا بقدر دخول عدد ٣ فى دليل الجذر

وأما اذا كان ن — ١ يساوى ٥ أو ٧ أو ١١ وهكذا من الاعداد التى لايمكن أن تكون حاصلة من ضرب ٢ , ٣ فانه لايمكن ايجاد الجذر بالطرق السابقة واليك طريقة أخرى لايجاده أحيانا وهى بعد قسمة الحد الاخير على الاول حلل خارج القسمة الى عوامله الاولية ثم خذ العوامل الناتجة من التحليل وضع لكل منها أسا يساوى خارج قسمة أسه على درجة الجذر ان أمكن

ولنوضح ذلك بامثلة فنقول

المثال الاول — المطلوب ايجاد أساس المتوالية الهندسية التى حدها الاول ٢ والاخير ٧٢ وعدد حدودها ٣

مقدار الاساس = $\sqrt[٢]{\frac{٧٢}{٢}} = \sqrt[٢]{٣٦} = ٦$

المثال الثانى ــ المطلوب ايجاد أساس المتوالية الهندسية التى حدها الاول ٢ والاخير ٤٣٢ وعدد حدودها ٤

مقدار الاساس = $\sqrt[٣]{\frac{٤٣٢}{٢}} = \sqrt[٣]{٢١٦} = ٦$

المثال الثالث ــ المطلوب ايجاد أساس المتوالية الهندسية التى حدها الاول ٢ والاخير ٢٥٩٢ وعدد حدودها ٥

مقدار الاساس = $\sqrt[٤]{\frac{٢٥٩٢}{٢}} = \sqrt[٤]{١٢٩٦}$

ولايجاد الجذر الرابع للعدد ١٢٩٦ يؤخذ جذره التربيعى فينتج ٣٦ ثم يؤخذ جذر ٣٦ فينتج ٦ وهو الاساس المطلوب

المثال الرابع ــ المطلوب ايجاد أساس المنوالية الهندسية التى حدّها الاول ٢ والاخير ٩٣٣١٢ وعدد حدودها ٧

مقدار الاساس = $\sqrt[٦]{\frac{٩٣٣١٢}{٢}} = \sqrt[٦]{٤٦٦٥٦}$

ولايجـاد الجـذر السادس يؤخذ الجذر التربيعى للعـدد ٤٦٦٥٦ فينتج ٢١٦ ثم يؤخذ الجذر التكعيبى للعدد ٢١٦ فينتج ٦ وهو الاساس المطلوب

المثال الخامس المطلوب ايجاد أساس المتوالية الهندسية التى حدها الاول ٢ والاخير ١٥٥٥٢ وعدد حدودها ٦

مقدار الاساس = $\sqrt[٥]{\frac{١٥٥٥٢}{٢}} = \sqrt[٥]{٧٧٧٦}$

وحيث ان درجة الجذر هنـا ٥ ليست ٢ ولا ٣ ولا يمكن تحليلها الى عوامل تكون ٢,٣ فنحلل العـدد ٧٧٧٦ الى عوامله الاولية فنجد أنه يساوى $٢^٥ \times ٣^٥$ وحينئذ يؤخذ ٢ × ٣ ويوضع على كل منها أس = خارج قسمة ٥ (وهو أسه الناتج من التحليل) على دليل الجذر ٥ فينتج ١ فيكون الاسـاس المطلوب هو ٢ × ٣ أى ٦

وليتنبه الطالب الى أنه اذا لم يمكن قسمة أس عوامل التحليل على درجة الجذر كانت المسالة غير ممكنة ولكن سياتى لاستخراج الجذور التى تكون من هذا القبيل طريقة أخرى نذكرها فيما بعد ان شاء الله تعالى

٣٩٦ ـ ادخال الاوساط الهندسـية بين عددين معلومين ـ ادخال الاوساط الهندسـية بين عددين معلومين هو عبارة عن تكوين متوالية هندسية يكون العددان المعلومان طرفين لها والأوساط المطلوبة حدودا متوسطة

فاذا أريد ادخال ثلاثة أوساط هندسـية بين العددين ٣ و ٤٨ لزم استخراج الأساس ولذلك يقال اذا اعتـبرنا أن المتواليـة تصاعدية يكون ٣ هو الحدّ الاول و ٤٨ هو الحدّ الأخير وبناء على ماتقدّم بالنمرة السابقـة يكون الأساس يساوى خارج قسمة الحدّ الأخير على الاوّل ماخوذا جذره بدرجة تساوى عدد حدود المتواليـة ناقصا واحدا وعدد الحدود ناقصا واحدا هو عبارة عن عدد الأوساط المراد ادخالهـا زائدا واحدا فاذا رمز للاساس بحرف س يحدث

$$س = \sqrt[٤]{\frac{٤٨}{٣}} = \sqrt[٤]{١٦} = \sqrt{٤} = ٢$$

وحينئذ يمكن تركيب المتوالية هكذا

∺ ٣ : ٦ : ١٢ : ٢٤ : ٤٨

٣٩٧ ــ يمكن ادخال أوساط هندسية متحدة العدد بين كل حدّين متتاليين من متوالية هندسية ويتركب من الجميع متوالية هندسية أساسها يساوى أساس المتوالية الاصلية ماخوذا جذره بدرجة تساوى عدد الأوساط المراد ادخالها بين كل حدّين زائدا واحدا

فاذا أريد ادخال وسطين هندسيين بين كل حدّين متتاليين من المتوالية الهندسية ∺ ٣ : ٢٤ : ١٩٢ : ١٥٣٦

نعتبر أن كل حدّين متتاليين عبارة عن طرفى متوالية هندسية وبناء على ماتقدّم فى النمرة السابقة تكون أساسات هذه المتواليات هى

$$\sqrt[٣]{\frac{٢٤}{٣}} \text{ و } \sqrt[٣]{\frac{١٩٢}{٢٤}} \text{ و } \sqrt[٣]{\frac{١٥٣٦}{١٩٢}}$$

وحيث ان كلا من $\frac{٢٤}{٣}$ و $\frac{١٩٢}{٢٤}$ و $\frac{١٥٣٦}{١٩٢}$ يدل على أساس المتوالية المفروضة وقد أخذت جذورها بدرجة واحدة فتكون متساوية وبحساب كل منها نجد أنه يساوى ٢ وبواسطته تتركب ثلاث متواليات جزئية وحيث كان الحدّ الاخير من الاولى عين الحدّ الاوّل من الثانية والاخير منها عين الاوّل من الثالثة فيمكن وصل هذه المتواليات ببعضها وتنتج المتوالية

∺ **٣** : ٦ : ١٢ : **٢٤** : ٤٨ : ٩٦ : **١٩٢** : ٣٨٤ : ٧٦٨ : **١٥٣٦**

التى أساسها ٢ وهو ناتج من أخذ جذر أساس المتوالية الاصلية بدرجة مساوية لعدد الأوساط الداخلة بين كل حدّين زائدا واحدا

٣٩٨ ـ لايجاد مجموع حدود متوالية هندسية تصاعدية يضرب الحدّ الاخير فى الاساس ويطرح من الحاصل الحدّ الاوّل ثم يقسم الباقى على الاساس ناقصا واحدا

مثلا ـ فى المتوالية ∺ ٢ : ٦ : ١٨ : ٥٤ : ١٦٢ : ٤٨٦ التى أساسها ٣

اذا رمز لمجموع الحدود بحرف ع يكون

$$ع = \frac{٤٨٦ \times ٣ - ٢}{٣ - ١}$$

وذلك لأنه لما كان ع رمزا لمجموع الحدود يكون

$$ع = ٢ + ٦ + ١٨ + ٥٤ + ١٦٢ + ٤٨٦ \quad (١)$$

واذا ضرب طرفا هذه المتساوية فى الاساس ٣ ولوحظ أن حاصل ضرب كل حدّ فى الاساس ينتج الحدّ التالى له يكون

$$٣ ع = ٦ + ١٨ + ٥٤ + ١٦٢ + ٤٨٦ + ٤٨٦ \times ٣ \quad (٢)$$

وبطرح متساوية (١) من متساوية (٢) يحدث

٣ع ـ ع = ٦ + ١٨ + ٥٤ + ١٦٢ + ٤٨٦ + ٤٨٦ × ٣ ـ ٢ ـ ٦ ـ ١٨ ـ ٥٤ ـ ١٦٢ ـ ٤٨٦ وباختصار الطرفين يحدث (٣ ـ ١) ع = ٤٨٦ × ٣ ـ ٢ واذا قسم طرفا هذه المتساوية على ٣ ـ ١ يحدث

$$ع = \frac{٤٨٦ \times ٣ - ٢}{٣ - ١}$$ وهو المطلوب

أعنى أن مجموع حدود المتوالية المفروضة هو ٧٢٨

٣٩٩ ـ لايجاد مجموع حدود متوالية هندسية تنازلية يضرب الحدّ الاخير فى الاساس ويطرح الحاصل من الحدّ الاول ويقسم الباقى على الفرق بين الواحد والاساس

مثلا ـ فى المتوالية ∴ ٤٨٦ : ١٦٢ : ٥٤ : ١٨ : ٦ : ٢ التى أساسها $\frac{١}{٣}$ اذا رمز لمجموع الحدود بحرف ع يكون

$$ع = \frac{٤٨٦ - ٢ \times \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٣}}$$

وذلك لانه لما كان ع رمزا لمجموع الحدود يكون

$$ع = ٤٨٦ + ١٦٢ + ٥٤ + ١٨ + ٦ + ٢ \quad (١)$$

واذا ضرب طرفا هذه المتساوية فى الاساس $\frac{١}{٣}$ ولوحظ أن حاصل ضرب كل حدّ فى الاساس ينتج الحدّ التالى له يكون

$$\frac{١}{٣} ع = ١٦٢ + ٥٤ + ١٨ + ٦ + ٢ + ٢ \times \frac{١}{٣} \quad (٢)$$

وبطرح متساوية (٢) من متساوية (١) يحدث

$ع - \frac{١}{٣} ع = ٤٨٦ + ١٦٢ + ٥٤ + ١٨ + ٦ + ٢ - ١٦٢ - ٥٤ - ١٨ - ٦ - ٢ - ٢ \times \frac{١}{٣}$ وبالاختصار يحدث

$(١ - \frac{١}{٣} ع) = ٤٨٦ - ٢ \times \frac{١}{٣}$ واذا قسم طرفا هذه المتساوية على $١ - \frac{١}{٣}$ ينتج

$$ع = \frac{٤٨٦ - ٢ \times \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٣}}$$ وهو المطلوب

أعنى أن مجموع حدود المتوالية المفروضة هو ٧٢٨

مسائل على المتواليات الهندسية

(٨٥٦) مامقدار الحد الخامس من متوالية هندسية حدها الاول ٥ وأساسها ٣

(٨٥٧) مامقدار الحد الرابع من متوالية هندسية حدها الاول ٦٢٥ وأساسها $\frac{١}{٥}$

(٨٥٨) ماجموع القوى المتتالية لعدد ٣ من القوة الثالثة الى السادسة

(٨٥٩) ماأساس المتوالية الهندســية التى حدها الاول ٣ والاخير ٧٦٨ وعدد حدودها خمسة

(٨٦٠) المطلوب ادخال أربعة أوساط هندسية بين العددين ١٤٥٨ و ٦

(٨٦١) بأى مقــدار ينقص مجموع الاثنى عشر حدا الاول من المتواليـــة ∺ $\frac{١}{٢}$: $\frac{١}{٤}$: $\frac{١}{٨}$: ‎. . . . . عن الواحد

(٨٦٢) ماجموع حدود متوالية هندســية حدها الاول ٣٦٤٥ وأساسها $\frac{١}{٣}$ وعدد حدودها سبعة

(٨٦٣) بائع كتب رتب كتبه الى درجات وجعــل ثمن الـكتاب من كل درجة ضعف ماقبلها وأقل الانواع ثمنه ٥ ملاليمات فما ثمن كتابين من النوع السادس وأربع كتب من النوع الخامس

(٨٦٤) تاجر ابتــدأ فى التجارة برأس مال قدره ٧٥٠٠٠ قرش وكان رأس ماله يزيد فى آخر كل ســنة بمقدار $\frac{٢}{٥}$ ما يكون فى أول السنة فما مقدار رأس المال بعــد عشر سنين

(٨٦٥) شخص يقبل أن يبيع منزله المشــيد بمبلغ ١٢٥ قرش و يشــترط على المشــترى أن يدفع زيادة على ذلك مليما واحدا فى أول يوم من الشهر ومليمين فى ثانى يوم وأربع مليمات فى اليوم الثالث وهكذا بالتضعيف الى آخر الشهر فما الذى يدفعه المشترى لوقبل ذلك

اللوغاريتمات

٤٠٠ ـ اذا اعتبرنا متواليتين احداهما هندسية مبدوءة بالواحد والاخرى عددية مبدوءة بالصفر فيكون كل حدّ من حدود المتوالية العددية لوغاريتما للحدّ المقابل له من المتوالية الهندسية

فاذا كانت المتواليتان الموافقتان لهذه الشروط هما

÷÷ ١ : ٣ : ٩ : ٢٧ : ٨١ : ٢٤٣ : ٧٢٩ أعداد

÷ ٠ . ٠,٥ . ١ . ١,٥ . ٢ . ٢,٥ . ٣ لوغاريتمات

كانت حدود المتواليــة العددية لوغاريتمات للحدود المقابلة لهـا من المتوالية الهندســية أعني أن لوغاريتم واحد هو صــفر ولوغاريتم ٣ هو ٠,٥ ولوغاريتم ٩ هو ١ وهكذا واجتماع هاتين المتواليتين يتركب منــه الجملة اللوغاريتمية

تنبيــه ـ يشترط أن يكون أساس المتوالية الهندسية أكبر من الواحد

٤٠١ ـ اذا فرضنا متواليتين أخريين بحيث تكون الهندسية تصاعدية ومبتدأة بالواحد والعــددية مبتدأة بصفر ينتج من اجتماعهما جملة لوغاريتمية أخرى ثم اذا فرضــنا متواليتين جديدتين بالشروط المذكورة تنتج جملة لوغاريتمية ثالثة وهكذا فيؤخذ مما ذكر أنه لاحصر للجمل اللوغاريتمية

٤٠٢ ـ أساس الجملة اللوغاريتمية هو الحدّ الذى لوغاريتمه الواحد ففى المتواليتين السابقتين بنمرة ٤٠١ أساس الجملة اللوغاريتمية هو ٩

٤٠٣ ـ يمكن وضع المتواليتين الســابقتين المكوّنتين للجملة اللوغاريتمية بالصورة الآتية

$\therefore$ ١ : ٣ : $٣^{٢}$: $٣^{٣}$: $٣^{٤}$: $٣^{٥}$: $٣^{٦}$

$\div$ ٠ . ٠،٥ . ٢ × ٠،٥ . ٣ × ٠،٥ . ٤ × ٠،٥ . ٥ × ٠،٥ . ٦ × ٠،٥

ويشاهد أن حدود المتوالية الهندســية هى عبارة عن قوى أساسها (وان كان ذلك ليس ظاهرا فى الحدّ الاوّل غير أنه مقــرر فى علم الجبر أن $٣^{٠}$ = ١) وحدود المتوالية العددية هى مكررات لأساسها

ومن ذلك ينتج أن أس الاساس فى المتواليــة الهندســية ومعامل أســاس المتواليــة العــددية المساوى لذلك الاس يوجدان فى حدّين متحدى الترتيب فى المتواليتين المذكورتين

مثال ذلك أس الحدّ الثالث من المتوالية الهندسية السابقة ٣ ومعامل الاساس فى الحدّ الثــالث المقابل له من المتواليــة العددية هو ٣ أيضا وكذا أس الحدّ الخامس من المتوالية الهندسية هو ٥ ومعامل الاساس فى الحدّ الخامس المقابل له من المتوالية العددية هو ٥ أيضا وهكذا

الخواص الاساسية للوغاريتمات

٤٠٤ ـ الخاصية الاولى ـ لوغاريتم حاصل ضرب مضروبين أو عدّة مضاريب يساوى مجموع لوغاريتمات هذه المضاريب

فاذا فرضنا جملة لوغاريتمية عمومية مثل

∷ ١ : س : س^{٢} : س^{٣} : س^{٤} : س^{٥} : س^{٦} : ... س^{ن}

÷ ٠ . ر . ٢ر . ٣ر . ٤ر . ٥ر : ٦ر : ... نر

وأخذت الحدود س و س^{٢} و س^{٤} مثلا وضربت فى بعضها ينتج

س × س^{٢} × س^{٤} = س^{٧}

ثم اذا أخذ لوغاريتمات هـذه الحدود وهى ر و ٢ر و ٤ر وجمعت على بعضها ينتج أن

لو س + لو س^{٢} + لو س^{٤} = ر + ٢ر + ٤ر = ٧ر

(ولو مختصر كلمة لوغاريتم)

وحيث ان س^{٧} و ٧ر هما حدّان متقابلان فقد ثبت المطلوب

نتيجة ـ اذا أريد ايجاد حاصل ضرب عددين يجمع لوغاريتميهما ونبحث عن العدد القابل للمجموع يكون هو حاصل الضرب المطلوب

٤٠٥ ـ الخاصية الثانية ـ لوغاريتم خارج قسمة عددين يساوى لوغاريتم المقسوم ناقصا لوغاريتم المقسوم عليه

مثلا اذا كان $\frac{١٢}{٤}$ = ٣ يكون لو ٣ = لو ١٢ − لو ٤

وذلك لان المقسوم يساوى المقسوم عليه مضروبا فى خارج القسمة أعنى ١٢ = ٤ × ٣ فبأخذ لوغاريتم الطرفين يحدث

لو ١٢ = لو ٤ + لو ٣ وبطرح لوغاريتم ٤ من الطرفين يحدث

لو ١٢ − لو ٤ = لو ٣ وهو المطلوب

نتيجة ـ اذا أريد ايجاد خارج قسمة عددين يطرح لوغاريتم المقسوم عليه من لوغاريتم المقسوم ونبحث عن العدد القابل للباقى فيكون هو خارج القسمة

٤٠٦ ـ لوغاريتم قوة أى عدد يساوى حاصـل ضرب درجة القوة فى لوغاريتم العدد

مثلا لو ٦^٤ = ٤ لو ٦

وذلك لان ٦^٤ = ٦ × ٦ × ٦ × ٦ و باخذ لوغاريتم الطرفين يحدث

لو ٦^٤ = لو ٦ + لو ٦ + لو ٦ + لو ٦ = ٤ لو ٦

وهو المطلوب

نتيجة ـ اذا أريد ايجاد مقـدار قوة أى عدد نضرب درجة القوة فى لوغاريتم العدد ونبحث عن العدد المقابل لحاصل الضرب يكون هو مقدار القوة المطلوبة

٤٠٧ ـ لوغاريتم جذر أى عدد بدرجة ما يساوى خارج قسمة لوغاريتم العدد على دليل الجذر

مثلا لو $\sqrt[5]{١٠٢٤}$ = $\frac{\text{لو ١٠٢٤}}{٥}$

وذلك لانه اذا فرض أن $\sqrt[5]{١٠٢٤}$ = س ورفع طـــرفا هــذه المتساوية الى الدرجة الخامسة ينتج ١٠٢٤ = س^٥ وباخذ لوغاريتم الطرفين يحدث

لو ١٠٢٤ = ٥ لو س ثم اذا قسم الطرفان على ٥ ينتج

$\frac{\text{لو ١٠٢٤}}{٥}$ = لو س واذا استعوض س بمقداره ينتج

$\frac{\text{لو ١٠٢٤}}{٥}$ = لو $\sqrt[5]{١٠٢٤}$ وهو المطلوب

نتيجة ـ لايجاد جذر أى عدد بدرجة ما نقسم لوغاريتم هذا العدد على دليل الجذر ونبحث عن العدد المقابل للخارج يكون هو الجذر المطلوب

٤٠٨ ــ من الخواص المتقدّمة يظهر أهمية اللوغاريتمات وفوائد استعمالها فى تسهيل الاعمال اذ بواسطتها تؤل عملية الضرب الى جمع والقسمة الى طرح والرفع الى قوة الى ضرب واستخراج الجذور مهما كانت درجتها الى قسمة

غير أن كل ذلك متوقف على وجود مجموعة شاملة للاعداد ولوغاريتماتها ولما كانت الجمل اللوغاريتمية كثيرة اختاروا الجملة التى أساسها ١٠ لحساب اللوغاريتمات وتسمى اللوغاريتمات المعتادة ومهما كان أساس الجملة اللوغاريتمية فان البحث عن لوغاريتمات جميع الاعداد يطول ولهذا قد أنشئت جداول مشتملة على الاعداد ولوغاريتماتها ليستعان بها فى الاعمال

تكوين جداول اللوغاريتمات

٤٠٩ ــ اللوغاريتمات المعتادة محسوبة بمساعدة المتواليتين

∺ ١ : ١٠ : ١٠٠ : ١٠٠٠ : ١٠٠٠٠ : ... الخ

÷ ٠ ٠ ١ ٠ ٢ ٠ ٣ ٠ ٤ ٠ ... الخ

المكوّنتين لجملة لوغاريتمية أساسها ١٠

ويرى من هذه المتوالية أن لوغاريتم ١ = ٠ ولوغاريتم ١٠ = ١ ولوغاريتم ١٠٠ = ٢ ولوغاريتم ١٠٠٠ = ٣ وهكذا

ولايجاد لوغاريتمات الاعداد التى بين ١ و ١٠ والتى بين ١٠ و ١٠٠ والتى بين ١٠٠ و ١٠٠٠ وهكذا ندخل بين كل حدّين متواليين من حدود المتوالية الهندسية مقدارا كبيرا جدّا من الاوساط الهندسية

حتى تكون حدود المتواليـــة الجديدة لاتفترق عن الاعداد ١، ٢ ،٣، ٤
، ٠٠٠٠ ، ١٠، ١١، ١٢ ، ٠٠٠، ١٠١ ، ١٠٢ ، ١٠٣ ، ٠٠٠ الا بمقادير
صغيرة جدًّا بحيث يمكن أخذ هذه الاعداد بدلا عنها ثم ندخل بين كل
حدّين من حدود المتوالية العددية أوساطا بقدر ماأدخل من الاوساط
بين حدود المتوالية الهندسية فحدود المتوالية العددية الجديدة تكون هي
لوغاريتمات لحدود المتوالية الهندســية أو للاعداد ١، ٢ ،٣، ٠٠٠ الخ
التي لاتفترق عنها الا بمقدار يسير جدًّا[1]

٤١٠ ـ تنبيه ـ لوغاريتمات الاعداد ١٠ و ١٠٠ و ١٠٠٠
و ١٠٠٠٠ هي على التوالي ١، ٢، ٣، ٤ أى هى أعداد صحيحة أما كل
عدد غيرهـا فان لوغاريتمه إمّا كسر أعشاري أو عدد أعشاري والجزء
الصحيح من هذه اللوغاريتمات يسمى العدد البياني للوغاريتم

خواص العدد البيـاني

٤١١ ـ الخاصية الاولى ـ العدد البياني من لوغاريتم أيّ عدد
صحيح يشتمل على وحدات بقدر عدد أرقام ذلك العدد ناقصا واحدا

فالجزء البياني من لوغاريتم العدد ٧٨٥٦ هو ٣

وذلك لان العـــدد ٧٨٥٦ أكبر من ١٠٠٠ وأصغر من ١٠٠٠٠
فيكون لوغاريتمه أكبر من لوغاريتم ١٠٠٠ وأصغر من لوغاريتم ١٠٠٠٠

(١) الطريقة التي ذكرناها كافية لان يدرك الطالب كيفية تكوين الجداول اللوغاريتمية ولكنها ليست مختارة لتكوينها

اى اكبر من ٣ وأصغر من ٤ فهو اذن ٣ وكسر أعنى أن العدد البيانى من لوغاريتم ٧٨٥٦ يشتمل على ثلاث وحدات أى بقدر عدد أرقامه ناقصا واحدا

ومن هنا يمكن أن يستدل على عدد أرقام العدد الذى علم لوغاريتمه باضافة واحد الى عدده البيانى

فاللوغاريتم ٣٫٣٥٦٤١ ينسب لعدد ذى أربعة أرقام

٤١٢ ــ الخاصية الثانية ــ اذا ضرب أى عدد فى احدى قوى عدد ١٠ فان الجزء الاعشارى من لوغاريتمه لايتغير وانما يزيد العدد البيانى وحدات بقدر رأس عدد ١٠

فاذا فرض أن لوغاريتم ٣٧٥٢ هو ٣٫٥٧٤٢٦ فان لوغاريتم ٣٧٥٢ × ١٠^٢ يكون ٣٫٥٧٤٢٦ + ٢ = ٥٫٥٧٤٢٦

وذلك لانه بناء على نمرة ٤٠٤ يكون لو ٣٧٥٢ × ١٠^٢ = لو ٣٧٥٢ لو ١٠^٢ وحيث فرض أن لوغاريتم ٣٧٥٢ = ٣٫٥٧٤٢٦ ومعلوم أن لو ١٠^٢ = ٢ يكون

لو ٣٧٥٢ × ١٠^٢ = ٣٫٥٧٤٢٦ + ٢ = ٥٫٥٧٤٢٦ وهوالمطلوب

٤١٣ ــ الخاصية الثالثة ــ اذا قسم عدد على احدى قوى عدد ١٠ فان الجزء الاعشارى من لوغاريتمه لايتغير وانما ينقص العدد البيانى وحدات بقدر أس عدد ١٠

فاذا فرض أن لوغاريتم ٣٧٥٢ هو ٣٫٥٧٤٢٦ فان لوغاريتم ٣٧٥٢ : ١٠^٢ يكون ٣٫٥٧٤٢٦ − ٢ = ١٫٥٧٢٦

وذلك أنه بناء على ماتقرر بنمرة ٤٠٥ يكون

لو ٣٧٥٢ : ١٠^٢ = لو ٣٧٥٢ — لو ١٠^٢ وحيث ان لو ٣٧٥٢ = ٣,٥٧٢٦ ولو ١٠^٢ = ٢ يكون

لو ٣٧٥٢ : ١٠^٢ = ٣,٥٧٤٢٦ - ٢ = ١,٥٧٤٢٦ وهو المطلوب

٤١٤ — ينتج من هاتين الخاصيتين (أولا) أنه اذا علم لوغاريتم عدد وأريد ايجـاد لوغاريتم حاصل ضربه فى ١٠ أو ١٠٠ أو ١٠٠٠ يكفى أن يضاف الى العدد البيانى للوغاريتم المعلوم ١ أو ٢ أو ٣

(ثانيا) اذا علم لوغاريتم عدد وأريد ايجـاد لوغاريتم خارج قسمته على ١٠ أو ١٠٠ أو ١٠٠٠ الخ يكفى أن يطرح من عدده البيـانى ١ أو ٢ أو ٣ الخ

(ثالثا) ان الاعداد الاعشارية المؤلفة من أرقام متحدة ذات ترتيب واحد ولاتختلف الا بوضع العلامة الاعشارية تكون لوغاريتماتها متحدة فى الجزء الاعشارى ومختلفة فقط فى الاعداد البيانية

العدد البيـانى السالب

٤١٥ — تمهيد — من المعلوم أن عملية طرح عدد مثل ١٢ من عدد أصغر منه مثل ٥ مستحيلة فى علم الحساب ولكن هناك اتفاق[1] على بيان نتيجة هذه العملية بطرح العدد ٥ من ١٢ ووضع العلامة — أمام الباقى والعدد الناتج يسمى عددا سالبا

وعلى هذا يكون ٥ — ١٢ = — ٧ والعدد ٧ يسمى عددا سالبا

(١) الاتفاق المشار اليه مبين فى علم الجبر

فالعدد السالب هو المسبوق بعلامة ـــ وينتج من عملية طرح فيها المطروح أكبر من المطروح منــه وبواسطة هذا الاتفاق وما تقدم بنمرة ٤١٥ يمكن أن يتحصل على لوغاريتم خارج القسمة فى حالة ماإذا كان المقسوم أصغر من المقسوم عليه

٤١٦ ـ العدد البيانى السالب ـ ينتج مما تقرر بنمرة ٤٠٥،٤١٥ أن كل عدد أصغر من الواحد يكون لوغاريتمه سالبا وحيث ان جداول اللوغاريتمات لاتشتمل على أعداد سالبة فيحول اللوغاريتم السالب الى آخر يكون عدده البيانى سالبا فقط والجزء الاعشارى موجبا

فاذا فرض لوغاريتم مثل ـ ٣،٤٨٣٥٩ نعتــبر أنه مركب من جزأين أحدهما العدد البيانى والثانى الجزء الاعشارى وان كلا منهما سالب أى ـ ٣،٤٨٣٥٩ = ـ ٠،٤٨٣٥٩ ـــ ٣ ثم اذا أضيف للطرف الثانى واحد وطرح منه واحد فالناتج لايتغير ويكون

ـ ٣،٤٨٣٥٩ = (ـ ٠،٤٨٣٥٩ + ١) ـــ ٣ ـــ ١ أو

ـ ٣،٤٨٣٥٩ = ٠،٥١٦٤١ ـــ ٤ ويكتب عادة هكذا

= ٣،٤٨٣٥٩ = $\bar{٤}$،٥١٦٤١

وحينئذ يمكن أن تستنتج القاعدة الآتية

لتحويل لوغاريتم سالب الى آخر يكون عدده البيـــانى سالبا يطرح الجزء الاعشارى من واحد صحيح ويضم الى عدده البيانى واحد ويعتبر العدد البيانى سالبـا

٤١٧ ـ العدد البيانى السالب من لوغاريتم أى كسر أعشارى يساوى وحدات بقدر العدد الدال على رتبة أول رقم معنوى بعد الشرطة

فاذا فرض الكسر الاعشارى ٠,٠٠٣٧٥ كان العـدد البيـانى من لوغاريتمه هو – ٣

وذلك لان العدد ٠,٠٠٣٧٥ = $\frac{٣,٧٥}{١٠٠٠}$ وبناء على ماتقدم بنمرة ٤٠٥

يكون لو ٠,٠٠٣٧٥ = لو ٣,٧٥ – لو ١٠٠٠ أو

لو ٠,٠٠٣٧٥ = لو ٣,٧٥ – ٣

وحيث ان عدد ٣,٧٥ هو أكبر من واحد وأصغر من عشرة فيكون لوغاريتمه أكبر من صفر وأصغر من ١ فاذا فرض أنه يساوى ٠,٥٧٤٠٣ يكون لو ٠,٠٠٣٧٥ = ٠,٥٧٤٠٣ – ٣ أى $\overline{٣}$,٥٧٤٠٣ وهو المطلوب

شرح جدول اللوغاريتم وكيفية استعماله

٤١٨ – جداول اللوغاريتمات المعتادة محسوبة على مقتضى الجملة التى أساسها عشرة غير أنها عديدة أولا بالنسبة لدرجة التقريب التى استعملت فى حسابها وثانيا بالنسبة لاوضاعها ولكنها على وجه العموم تشتمل على الاعداد من الواحد الى حد معين وعلى لوغاريتمات تلك الاعداد مقربة الى درجة اعشارية محدودة

فمن الجـداول ماهو مقرب الى أجزاء من عشرة آلاف أى يحتوى الجزء الاعشارى من اللوغاريتم على أربعـة أرقام أعشارية ومنها ماهو مقرب الى أجزاء من مائة ألف أى يحتوى الجزء الاعشارى من اللوغاريتم على خمسـة أرقام أعشارية ومنها ماهو مقرب الى أجزاء من مليون أى يحتوى على ستة أرقام اعشارية وهكذا

وأدق الجداول ما كان مشتملاً على درجة تقريب أكثر

ولنذكر شرح الجدول الملحق بهذا الكتاب وكيفية استعماله فنقول

٤١٩ — هذا الجدول يشتمل على الاعداد من واحد الى ١٠٠٠٠ وعلى الاجزاء الاعشارية من لوغاريتمات هذه الاعداد مقربة الى اجزاء من مائة ألف أى يحتوى على خمسة أرقام أعشارية ولم يكتب فيه العدد البيانى لانه يمكن أن يستدل عليه بمجرد معرفة عدد أرقام العدد المراد ايجاد لوغاريتمه بمراعاة ماتقدم بنمرة ٤١١

والجدول المذكور مركب من ٣١ صحيفة تشتمل الاولى منها على الاعداد من ١٠ الى ٩٩ على الترتيب فى الصفوف الرأسية المعنونة بحرف ع وأمام كل عدد منها الجزء الاعشارى من لوغاريتمه فى الصف الرأسى المعنون بحرفى لو

أما باقى الصحائف وهى من صحيفة ٢ الى صحيفة ٣١ فينقسم كل منها الى أحد عشر صفا رأسيا الاول معنون بحرف ع والثانى بصفر والتسعة صفوف الباقية معنونة بالارقام التسعة البسطية على التوالى والصف الاول الرأسى المذكور يشتمل على الاعداد بالترتيب من ١٠٠ الى ٩٩٩ موزعة على الصحائف المذكورة والجزء الاعشارى من لوغاريتم أى عدد منها هو العدد المقابل له فى الصف الرأسى المعنون بصفر (وهذه الاجزاء عينها هى الاجزاء الاعشارية من لوغاريتمات الاعداد ذات الارقام الاربعة التى تكون الارقام الثلاثة الاول من يسارها نفس هذه الارقام والرابع صفرا) .

وتشـتمل باقى الصفوف الرأسـية على الاجزاء الاعشارية من لوغاريتمات الاعداد المركبة من أربعـة أرقام فى حالة مااذا كان آحادها غير صفر والجزء الاعشارى من لوغاريتم أى عدد منها يوجد فى تقاطع الصف الافقى المبدوء بالارقام الثلاثة الاول من يسار العدد مع الصف الرأسى المعنون بالرقم الرابع

واستعمال جدول اللوغاريتم ينحصر فى مسئلتين الاولى ايجاد لوغاريتم عدد معلوم والثانية ايجاد العدد المقابل للوغاريتم معلوم

٤٢٠ ـ المسـئلة الاولى ايجاد لوغاريتم عدد معلوم وفيها خمس حالات

الحـالة الاولى ـ اذا كان العدد المعلوم أقل من مائة نبحث عنـه فى الصحيفة الاولى فى الصفوف الرأسية المعنونة بحرف ع فالعدد المقابل له فى الصف الرأسى المعنون بحرفى (لو) يكون هو اللوغاريتم المطلوب

مثلا اذا أريد ايجـاد لوغاريتم ٢٥ نبحث عنه فى الصحيفة الاولى فالعدد المقابل له وهو ٣٩٧٩٤ يكون هو الجزء الاعشارى من اللوغاريتم المطلوب وأما عدده البيانى فهو ١ كما فى نمرة ٤١١ وحينئذ يكون لو ٢٥ = ١,٣٩٧٩٤ وبمثـل ذلك نجـد أن لو ٨ = ٠,٩٠٣٠٩ ولو ٦٦ = ١,٨١٩٥٤ ولو ٨٧ = ١,٩٣٩٥٢

الحالة الثانية ـ اذا كان العدد المعلوم أكبر من ١٠٠ وأقل من ١٠٠٠ نبحث عنه فى الصفوف الرأسـية المعنونة بحرف ع من صحيفـة ٢ الى صحيفة ٣١ فالعـدد المقـابل له فى الصف الرأسى المعنون بصفر يكون هو اللوغاريتم المطلوب

مثلا اذا أريد ايجاد لوغاريتم ٤٢٩ نبحث عنه فى صحائف الجدول فى الصفوف الرأسية المعنونة بحرف ع فنجده فى صحيفة ١٢ فالعدد المقابل له فى الصف المعنون بصفر وهو ٦٣٢٤٦ يكون هو الجزء الاعشارى من اللوغاريتم المطلوب وأما العدد البيانى فهو ٢ كما فى نمرة ٤١١ وحينئذ يكون لو ٤٢٩ = ٢,٦٣٢٤٦ وبمثل ذلك نجد أن لو ٥٠٨ = ٢,٧٠٥٨٦ (من صحيفة ١٥) ولو ٦٧٢ = ٣,٨٢٧٣٧ (من صحيفة ٢١) ولو ٨٧٥ = ٢,٩٤٢٠١ (من صحيفة ٢٧) ولو ٩٩٥ = ٢,٩٩٧٨٢ (من صحيفة ٣١)

الحالة الثالثة — اذا كان العدد المعلوم أكبر من ١٠٠٠ وأصغر من ١٠٠٠٠ نبحث عن الثلاثة أرقام الاول من يسار العدد المعلوم فى الصفوف الرأسية المعنونة بحرف ع ونأخذ الرقم الرابع للعدد من الصف الاول الافقى المعنونة به الصفوف الرأسية ثم نتتبع الصف الافقى المبدوء بالارقام الثلاثة المذكورة والصف الرأسى المبدوء بالرقم الرابع فمحل تقاطع الصفين يكون هو الجزء الاعشارى من اللوغاريتم المطلوب

مثلا اذا أريد ايجاد لوغاريتم ٤٨٦٢ نبحث عن العدد المركب من الارقام الثلاثة الاول من يسار هذا العدد وهو ٤٨٦ فى صحائف الجدول فى الصفوف الرأسية المعنونة بحرف ع فنجده فى صحيفة ١٤ ونبحث عن الرقم الرابع ٢ فى الصف الافقى الاول من هذه الصحيفة عينها ثم نتتبع الصف الافقى المبدوء بالعدد ٤٨٦ والصف الرأسى المبدوء برقم ٢ فنجد فى تقاطع هذين الصفين العدد ٦٨٦٨١ يكون

هو الجزء الاعشارى من لوغاريتم العدد ٤٨٦٢ وأما عدده البيانى فهو ٣
كما فى نمرة ٤١١ وحينئذ يكون لو ٤٨٦٢ = ٣,٦٨٦٨١

وبمثـل ذلك نجد لو ٧٨١٤ = ٣,٨٩٢٨٧ (من صحيفة ٢٤)
ولو ٩٨٦٦ = ٣,٩٩٤١٤ (من صحيفة ٣١)

الحـالة الرابعة ـ اذا كان العدد المعلوم أكبر من ١٠٠٠٠ نجرى العمل كما يأتى

مثـلا اذا أريد ايجـاد لوغاريتم العـدد ٧٨٦٥٤٦ يقال ان الجزء الاعشارى من لوغاريتم هـذا العدد لا يتغير بقسمة هذا العدد على احدى قوى عدد ١٠ فاذا قسم على ١٠٠ ليكون محتويا على أربعـة أرقام صحيحة فقط ينتج ٧٨٦٥,٤٦ ثم نبحث عن لوغاريتم العدد ٧٨٦٥ كما تقـدم فى الحالة الثالثـة فنجده ٣,٨٩٥٧٠ من صحيفة ٢٤ ونبحث عن لوغاريتم العدد ٧٨٦٦ الاكبر من ٧٨٦٥ بواحد فنجد أنه يساوى ٣,٨٩٥٧٥ ونطرح هـذين اللوغاريتمين من بعضهما فينتج ٠,٠٠٠٠٥
ثم يقال حيث ان الفرق بين العددين ٧٨٦٥ و ٧٨٦٦ وهو واحد يقابله هنا الفرق بين اللوغاريتمين وهو ٠,٠٠٠٠٥ وحيث ان الاعداد تقريبا تتناسب مع لوغاريتماتها فاذا بحثنا عن الفرق بين أصغر العددين والعدد المعلوم ينتج ٠,٤٦ ويقابله الحد الرابع من التناسب

١ : ٠,٤٦ :: ٠,٠٠٠٠٥ : س ومنه س = ٠,٤٦ × ٠,٠٠٠٠٥
= ٠,٠٠٠٠٢٣٠ أو ٠,٠٠٠٠٢ تقريبـا واذا أضيف هـذا الجزء الى أصغر اللوغاريتمين وهو ٣,٨٩٥٧٠ ينتج ٣,٨٩٥٧٢ يكون لوغاريتم

العدد ٧٨٦٥,٤٦ وأما لوغاريتم العدد ٧٨٦٥٤٦ فلا يختلف عن هذا اللوغاريتم الا فى العدد البيانى وعلى حسب نمرة ٤١١ يكون عدده البيانى هو ٥ وحينئذ يكون لو ٧٨٦٥٤٦ = ٥,٨٩٥٧٢

ومما ذكر تستنتج القاعدة الآتية

قاعدة لايجاد لوغاريتم عدد أكبر من ١٠٠٠٠ نفصل من يساره أربعة أرقام ونعتبر باقى الارقام جزأ أعشاريا ثم نبحث عن لوغاريتم العدد المركب من الاربعة أرقام المفصولة ولوغاريتم عدد أكبر منه بواحد ونطرح أصغر اللوغاريتمين من الاكبر ونضرب الفرق الناتج فى العدد المعتبر أنه جزء أعشارى ونقرب حاصل الضرب الى أجزاء من مائة ألف ونضيف العدد الناتج الى أصغر اللوغاريتمين ثم نعدل العدد البيانى كما تقتضيه قاعدة نمرة ٤١١

وبناء على هذه القاعدة وما تقدم ايضاحه بالمثال الذى قبلها نجد

أن لو ٧٦٨٦٤٣٢ = ٦,٨٨٥٧٣ (من صحيفة ٢٤)

ولو ٤٥٤٦٣٤٨٩ = ٦,٧٠٦٥٧٦٦ (من صحيفة ١٣)

الحالة الخامسة ـ اذا كان العدد المعلوم عددا اعشاريا أو كسرا أعشاريا نصرف النظر عن الفاصلة ونأخذ لوغاريتمه كما لو كان عددا صحيحا ثم يعدل العدد البيانى على حسب ماتقتضيه احدى قاعدتى نمرة ٤١١ ونمرة ٤١٧

مثلا لايجاد لوغاريتم ٣٥,٤١٦ نصرف النظر عن الفاصلة ونبحث عن لوغاريتم ٣٥٤١٦ فنجد أنه يساوى ٤,٥٤٩٢٠ وحيث ان العدد

المفروض يشتمل على عدد صحيح ذى رقمين فيكون عدده البيـانى ١
ويكون لو ٣٥٫٤١٦ = ١٫٥٤٩٢٠

ولايجاد لوغاريتم ٠٫٠٠٥٨٣٤ نصرف النظر عن الفاصـلة ونبحث عن لوغاريتم ٥٨٣٤ فنجد أنه يساوى ٣٫٧٦٥٩٧ وحيث ان العـدد المفروض هو كسر اعشارى وأرقامه المعنوية مبتدأة من المنزلة الثالثـة فيكون عدده البيانى ـ ٣ كما فى نمرة ٤١٧ وحينئذ يكون

لو ٠٫٠٠٥٨٣٤ = $\overline{3}$٫٧٦٥٩٧

٤٢١ ـ المسئلة الثانية ـ لايجاد العدد المقابل للوغاريتم معلوم نبحث عن الجزء الاعشارى من اللوغاريتم المعلوم فى الصفوف الرأسية المعنونة بصـفر فان وجد كان العـدد المقابل له فى أول صف رأسى هو العدد المطلوب ثم يعدل على حسب العدد البيانى

مثلا اذا أريد ايجاد العدد المقابل للوغاريتم ٢٫٤٣٧٧٥ نبحث عن الجزء الاعشارى ٠٫٤٣٧٧٥ فى الصفوف الرأسية المعنونة بصفر فنجده فى صحيفة ٧ فالعدد المقـابل له فى أول صف رأسى المعنون بحرف ع وهو ٢٧٤ يكون هو العدد المقابل للوغاريتم المعلوم وحيث ان العدد البيانى ٢ فيدل على أن العدد المبحوث عنه يحتوى على ٣ أرقام صحيحة أى أنه نفس العدد ٢٧٤

واذا أريد ايجاد العدد المقابل للوغاريتم ٤٫٥٨٦٥٩ نبحث عن الجزء الاعشارى من هذا اللوغاريتم فنجده فى صحيفة ١١ والعـدد المقابل له وهو ٣٨٦ يكون هو العدد المبحوث عنه غير أنه لما كان العدد البيانى من اللوغاريتم المعلوم هو ٤ فيدل على أن العدد المنسوب اليه هذا اللوغاريتم

مركب من خمسة أرقام وحيث ان العدد ٣٨٦ يحتوى على ثلاثة أرقام فنضع على يمينه صفرين ليكون مشتملا على خمسة أرقام وحينئذ يكون ٤٫٥٨٦٥٩ = لو ٣٨٦٠٠ أى أن العدد المقابل للوغاريتم المعلوم هو ٣٨٦٠٠

واذا لم يوجد الجزء الاعشارى من اللوغاريتم المعلوم فى الصف الرأسى الاول نحصره بين عددين متتاليين من أعداد الصف المذكور أحدهما أكبر منه والآخر أصغر منه ثم نتتبع الصف الافقى المبدوء بالاصغر فان وجد فيه الجزء الاعشارى من اللوغاريتم المعلوم كان الرقم المحاذى له فى أول صف أفقى هو رابع رقم من العدد المبحوث عنه أما الثلاثة أرقام الاول فهى الموجودة بازاء الصف المذكور فى أول صف رأسى

مثلا اذا أريد ايجاد العدد المقابل للوغاريتم ٢٫٨٩٤٦٥ نبحث عن الجزء الاعشارى من هذا اللوغاريتم فى أعداد الصفوف الرأسية المعنونة بصفر فلا نجده فيها ولكن نجد أنه محصور بين ٨٩٤٣٢ و ٨٩٤٨٧ (من صحيفة ٢٤) فنتتبع الصف المبدوء بالعدد ٨٩٤٣٢ فنجد فى هذا الصف الجزء الاعشارى من اللوغاريتم المعلوم وهو ٨٩٤٦٥ فى الصف الرأسى المعنون برقم ٦ فيكون هو الرقم الرابع من العدد المبحوث عنه أما الثلاثة أرقام الاول فهى المركب منها العدد ٧٨٤ الموجود فى أول هذا الصف الافقى ويكون العدد المقابل للوغاريتم المعلوم هو ٧٨٤٦ الا أنه حيث كان عدده البيانى ٢ فيدل على أن العدد المنسوب له مركب من ثلاثة أرقام صحيحة وإذن فالعدد المبحوث عنه هو ٧٨٤٫٦

وأخيرا اذا لم يوجد الجزء الاعشارى من اللوغاريتم بين أعداد الصف الافقى المبدوء بأصغر اللوغاريتمين المحصور بينهما الجزء الاعشارى من اللوغاريتم المعلوم فتتبع الطريقة الموضحة بالمثال الآتى

مثـــلا اذا أريد ايجـاد العدد المقابل للوغاريتم ٤٫٩٠٣٥٥ نبحث عن الجزء الاعشارى من هذا اللوغاريتم فى الصفوف الرأسية المعنونة بالصفر فلانجده لكنه ينحصر بين ٩٠٣٠٩ و٩٠٣٦٣ (من صحيفة ٢٥) ثم نتبع الصف المبـدوء بالعـــدد ٩٠٣٠٩ للبحث عن ٩٠٣٥٥ فلا نجده لكنه ينحصر بين العددين ٩٠٣٥٢ و ٩٠٣٥٨ اللذين هما الجزآن الاعشاريان من لوغاريتمى العددين ٨٠٠٨ و ٨٠٠٩ ثم نبحث عن الفرق بين الجزأين الاعشاريين المذكورين فنجده ٠٫٠٠٠٠٦ وهو يقـابل الفرق بين العـــددين أى ١ ثم نطرح اللوغاريتم الاصغر من اللوغاريتم المعلوم فينتج ٠٫٠٠٠٠٣ ويقال اذا كان الفرق ٠٫٠٠٠٠٦ يقابل هنا واحدا صحيحا فالفرق ٠٫٠٠٠٠٣ يقابل كميـة يرمز لهـا بحرف س ويمكن استخراجها من التناسب ٠٫٠٠٠٠٦ : ٠٫٠٠٠٠٣ :: ١ : س

ومنه س = $\frac{٠٫٠٠٠٠٣}{٠٫٠٠٠٠٦}$ أو $\frac{٣}{٦}$ أو ٠٫٥

وحينئذ اذا أضيف هـــذا العدد ٠٫٥ الى أصغر العـــددين المقابل لأصغر اللوغاريتمين المحصور بينهما اللوغاريتم المعـــلوم ينتج ٨٠٠٨٫٥ ثم يقال حيث ان العدد البيانى المعلوم هو ٤ فيكون العدد المبحوث عنه مركبا من خمسة أرقام أى انه هو ٨٠٠٨٥

ويمكن تلخيص هذه العملية فى القاعدة الآتية

قاعدة ــ بعد البحث عن الجزء الاعشارى من اللورغاريتم المعلوم فى أعداد الصفوف الرأسية المعنونة بصفر وعدم وجوده فيها نحصره بين عددين متتالين منها أحدهما أصغر منه والآخر أكبر منه ثم نتتبع الصف المحتوى على الاصغر فاذا لم يوجد اللوغاريتم المعلوم فى أعداد هذا الصف نحصره أيضا بين عددين منه أحدهما أصغر منه والآخر أكبر منه ثم نطرح أصغر اللوغاريتمين من الاكبر والاصغر من اللوغاريتم المعلوم ونقسم هذا الفرق الاخير على الفرق بين اللوغاريتمين الجدوليين ويضاف الكسر الاعشارى الناتج الى العدد المقابل لاصغر اللوغاريتمين ثم نعدل أرقام العدد الناتج على حسب ماتقتضيه قاعدة العدد البيانى

عمليات اللوغاريتمات

٤٢٢ ــ تمهيد ــ اذا تأملنا فى الخواص الاساسية للوغاريتمات نرى أنه يطلب أحيانا جمع لوغاريتمات على بعضها أو طرح لوغاريتم من آخر أو ضرب لوغاريتم فى عدد أو قسمته على عدد ولا صعوبة فى اجراء هذه العمليات على اللوغاريتمات اذا كانت كلها موجبة. أما اذا كان بعضها ذا عدد سالب فلا يتيسر اجراء الاعمال على الاعداد السالبة إلا بعد معرفة كيفية اجراء العمليات الاساسية على تلك الاعداد ولهذا نذكر القواعد الضرورية التى تلزم لاجراء هذه العمليات على أعداد كلها أو بعضها سالب فنقول

أولا ــ اختصار الاعداد الموجبة والسالبة ــ اذا وجدت جملة أعداد متتالية بعضها موجب والبعض سالب فانه يمكن اختصارها

أى تحويلهـا الى عدد واحد ولذلك نجمع الاعداد الموجبـة على بعضها والسالبة على بعضها ونطرح المجموع الاصـغر من الا كبر ونضع أمام الناتج علامة الا كبر

مثال ذلك ٧ + ٩ − ٣ + ٢ − ٨ = ١٨ − ١١ = ٧

ثانيا ـ اذا أريد جمع أعداد سالبـة وموجبة توضع بجوار بعضها كل منها بعلامته ثم يختصر الناتج كما تقدم

المثـال الاول ـ اذا أريد جمـع ٥،٦ , − ٢ , − ٣ , − ٤ توضع هكذا ٥ + ٦ − ٢ − ٣ − ٤ ثم يختصر هذا الوضع فينتج ١١ − ٩ = ٢

المثال الثـانى ـ اذا أريد جمع ٥ , ٦ , − ٧ , − ٨ , − ٣ توضع هكذا

٥ + ٦ − ٧ − ٨ − ٣ ثم يختصر هـــذا الوضع فينتج ١١ − ١٨ = − ٧

ثالثا ـ لايجـاد باقى طرح عددين أحدهما أو كلاهما سالب نغـير اشارة العدد المطروح (ان كان زائدا يجعل ناقصا وان كان ناقصا يجعل زائدا) ثم نضعه بجوار المطروح منه ونختصر الوضع الناتج

المثال الاول ـ اذا أريد طرح − ٥ من ٧ نغير اشـارة المطروح وهو − ٥ فيصير + ٥ نضعه بجوار المطروح منــه ونختصر النـاتج هكذا

٧ − (− ٥) = ٧ + ٥ = ١٢

المثال الثانى ـ اذا أريد طرح ٥ من — ٧ نغير اشارة المطروح خمسة فيصير — ٥ نضعه بجوار المطروح منه ونختصر الوضع الناتج هكذا — ٧ — (+ ٥) = — ٧ — ٥ = — ١٢

المثال الثالث ـ اذا أريد طرح — ٥ من — ٧ نغير اشارة المطروح وهو — ٥ فيصير + ٥ ثم نختصر الناتج هكذا

— ٧ — (— ٥) = — ٧ + ٥ = — ٢

رابعا ـ لضرب عدد سالب فى عدد موجب نضرب العددين فى بعضهما ويكون الحاصل سالبا

مثلا لضرب ٣ فى — ٥ نضرب ٣ فى ٥ ينتج ١٥ ويكون سالبا وحينئذ فالحاصل المطلوب يكون — ١٥

خامسا ـ لقسمة عدد سالب على عدد موجب نقسم العدد السالب باعتباره موجبا على العدد الموجب ويكون الخارج سالبا

فلقسمة — ١٥ على ٥ نقسم ١٥ على ٥ ينتج ٣ ويكون سالبا وحينئذ فالخارج المطلوب يكون — ٣

ولاحاجة لنا الآن بضرب عددين سالبين فى بعضهما ولا بقسمة عددين سالبين على بعضهما

اذا تقرر هذا يمكن اجراء العمليات الاساسية للوغاريتمات سواء كانت أعدادها البيانية موجبة أو سالبة بمراعاة القواعد السابقة وقواعد الاعداد الاعشارية ولمزيد الايضاح نذكر هذه القواعد مفصلة فنقول

٤٢٣ ـ الجمع ـ لجمع عدة لوغاريتمات نجمع الاجزاء الاعشارية على بعضها ثم نجمع الاعداد البيانيـــة مع الآحاد الصحيحة النـاتجة من جمع الاجزء الاعشـارية (ان وجدت) بمراعاة قاعدة جمـــع الاعداد الموجبة والسالبة

أمثلة ذلك

٣,٥٨١٠٤	$\overline{٣}$,٣٤١٤٣
٢,٢٩٤٤٧	٢,٥٩١٢٩
٤,١٤٣٩٥	$\overline{٤}$,١٩٠٣٣
١,١٧٣٧٧	١,٦٤٠٤٨
١١,١٩٣٢٣	$\overline{٣}$,٧٦٣٥٣

ولا حاجة لشرح كيفية العمل فى العملية الاولى اذ هى جمع أعداد أعشارية أما العملية الثانية فقــد جمعت الأجزاء الاعشارية فنتج من مجموعها ١,٧٦٣٥٣ ثم وضع الجزء الاعشارى تحت الخط وأضــيف واحد الى الاعداد البيانيــة فكان المجموع ١ ـ ٣ + ٢ ـ ٤ + ١ = ـ ٣ وضع فى محل العدد البيانى

٤٢٤ ـ الطرح ـ لطرح لوغاريتم من آخر يطرح أولا جزآهما الاعشاريان من بعضهما ثم العددان البيانيان كذلك مع مراعاة قاعدة طرح الاعداد السالبة اذا كان أحدهما سالبا أمثلة ذلك

(١)	(٢)	(٣)	(٤)
٢,٧٦٤٩٥	$\overline{١}$,٦٤٣٣٥	٢,٦٥٧٤٤	$\overline{٢}$,٦٧٤٢٢
٣,٨٦٢٩١	٥,٩٥١٢٤	$\overline{٣}$,٧٥٦٣٦	$\overline{٤}$,٧٣٣٣١
$\overline{٢}$,٨١٢٠٤	$\overline{٧}$,٦٩٢١١	٤,٩٠١٠٨	١,٩٤١٩١

فى المثال الاول بعـد طرح الجزأين الاعشاريين من بعضهما يلزم طرح واحد من العـدد الصحيح ٢ ثم طرح العـدد ٣ ويكون العدد البيانى لباقى الطرح هو ٢ — ١ — ٣ = — ٢

وفى المثال الثانى بعـد طرح الجزأين الاعشاريين من بعضهما يلزم طرح واحد من العدد البيانى — ١ ثم طرح العدد ٥ فيكون العددالبيانى للباقى هو — ١ — ١ — ٥ = — ٧

وفى المثال الثالث بعد طرح الجزأين الاعشاريين من بعضهما يلزم طرح واحد من العدد البيـانى ٢ ثم طرح — ٣ وبذلك يكون العدد البيانى للباقى هو ٢ — ١ — (—٣) = ٢ — ١ + ٣ = ٤

وفى المثال الرابع بعـد طرح الجزأين الاعشاريين من بعضهما يلزم طرح واحد من العدد البيانى — ٢ ثم طرح — ٤ وبذلك يكون العدد البيانى للباقى هو — ٢ — ١ — (— ٤) = — ٢ — ١ + ٤ = ١

٤٢٥ الضرب ـ لضرب لوغاريتم فى عدد ما يضرب أولا الجزء الاعشارى فى ذلك العدد ويحفظ العدد الصحيح الناتج من ذلك ليضم الى حاصل ضرب العدد البيانى فى ذلك العدد (ويراعى قاعدة ضرب العدد السالب اذا كان العدد البيانى سالبا)

فاذا أريد ضرب اللوغاريتم ٢,٥٢١٤٤ فى ٣ أو ضرب اللوغاريتم ١̄,٣٨٤٦٥ فى ٤ نجرى العمل هكذا

٢,٥٢١٤٤	١̄,٤٦٥٣٨
٣	٤
٧,٥٦٤٣٢	٣̄,٨٦١٥٢

ففى المثال الاول يجرى العمل كما فى ضرب الاعداد الاعشارية

وفى المثال الثانى نضرب الجزء الاعشارى فى ٤ فينتج ١,٨٦١٥٢ يحفظ العدد الصحيح واحد ويضاف الى حاصل ضرب — ١ × ٤ الذى هو — ٤ فينتج — ٤ + ١ = — ٣ ويكون الحاصل المطلوب ٣,٨٦١٥٢

٤٣٦ ـ القســمة ـ لقسمة لوغاريتم على عدد يقال اذا كان العددالبيانى موجبا يقسم كما فى الاعداد الاعشارية واذا كان سالبا يقسم العدد البيانى على هذا العدد ويكون خارج قسمته سالبا ثم يقسم الجزء الاعشارى على ذلك العــدد ويلاحظ أن يجعل العــدد البيانى مضاعفا للمقسوم عليه

المثال الاول ـ اذا أريد قسمة ٤,٤٧١٢٩ على ٣ نقسم كما فى الاعداد الاعشارية فينتج ١,٤٩٠٤٣ وهو الخارج المطلوب

المثال الثانى ـ اذا أريد قسمة اللوغاريتم ٤̅,٦٤٥١٦ على ٢ يقال حيث ان العدد البيـانى السالب ـ ٤ مضاعف الى ٢ نقسمه على ٢ فينتج ـ ٢ ثم نقسم الجزء الاعشارى كذلك على ٢ فينتج ٠,٣٢٢٥٧ فيكون الخارج المطلوب ٢,٣٢٢٥٨

المثال الثالث ـ اذا أريد قسمة اللوغاريتم ٧,٥٤٨٢٤ على ٤ يقال حيث ان العدد البيانى ـ ٧ ليس مضاعفا للمقسوم عليه ٤ فيضاف اليه ـ ١ ليكون مكررا له وفى نظير ذلك يضاف واحد الى الجزء الاعشارى

ثم يقسم كل من العدد البياني الناتج والجزء الاعشاري مضافا اليه واحد على ٤ هكذا

$$\frac{\bar{٧},٥٤٨٢٤}{٤} = \frac{-٧+٠,٥٤٨٢٤}{٤} = \frac{-٨+١,٥٤٨٢٤}{٤} = -\frac{٨}{٤} + \frac{١,٥٤٨٢٤}{٤}$$

$$= -٢ + ٠,٣٨٧٠٦ = \bar{٢},٣٨٧٠٦$$

المتمم اللوغاريتمى

٤٢٧ ـ قد علم مما تقدم أن استعمال اللوغاريتمات يحول العمليات الحسابية الى عمليات أخرى أبسط منها ومع ذلك فانه يمكن تسهيل الاعمال فيها بواسطة استعاضة عمليتى جمع وطرح يراد اجراؤهما معا الى عملية جمع فقط

فاذا أريد طرح لوغاريتم كمية مرموز لها بحرف م مثلا من مجموع لوغاريتمات كميات أخرى مرموز له بحرف ل فانه عوضا عن طرح لو م من لو ل يضم الى كمية لو ل الكمية ـ لو م وهو ما يعبر عنه بالمتمم اللوغاريتمى لكمية م

ولمعرفة متمم لوغاريتم كمية م بالنسبة الى لوغاريتمها نرمز للعدد البيانى من لوغاريتم هذه الكمية بحرف ب وللجزء الاعشارى بحرف ع فيكون

لو م = ع + ب ويكون

ـ لو م = ـ ع ـ ب أو

ـ لو م = ١ ـ ع ـ ب ـ ١ أو

ـ لو م = ١ ـ ع ـ (ب + ١)

أما ١ ــ ع فهو عبارة عن باقى طرح الجزء الاعشارى للوغاريتم المعلوم من واحد صحيح (ولا بد أن يكون هـذا البـاقى عددا موجبا) يسمى هذا الباقى بمتمم الجزء الاعشارى لواحد صحيح ويمكن الحصول وعليه بطرح أول رقم عن يمينه من عشرة وباقى الارقام من تسعة

وأما ــ (ب + ١) فهو عبارة عن العدد البيانى للوغاريتم المعلوم مضافا اليه واحد ومغيرا علامته ومجموع هذين المقدارين هو المعبر عنه بالمتمم اللورغايتمى وحينئذ تستنتج القاعدة الآتية

لطرح لوغاريتم من آخر يضم الى ذلك اللوغاريتم متمم لوغاريتم المطروح وهذا المتمم يمكن الحصول عليه بطرح الجزء الاعشارى من واحد صحيح واضافة واحد الى العدد البيانى ثم تغير اشارة حاصل الجمع

مثلا بدلا عن طرح ٢,٨٧٧٣١ من ٤,٩٧١٩٥ نضم متمم المطروح وهو ٣̅,١٢٢٦٩ الى المطروح منه فينتج ٢,٠٩٤٦٦

أذ أن ٤,٩٧١٩٧ — ٢,٨٧٧٣١ = ٢,٠٩٤٦٦

٤,٩٧١٩٧ + ٣̅,١٢٢٦٩ = ٢,٠٩٤٦٦

والعدد ٣̅,١٢٢٦٩ هو المتمم اللوغاريتمى للمطروح ٢,٨٧٧٣١

أمثلة تحل بواسطة قواعد اللوغاريتمات

المثال الاول ــ اذا أريد ضرب ٢٧٤ فى ٧,٦٢٥ نرمز لحاصل الضرب بحرف س فيكون س = ٢٧٤ × ٧,٦٢٥ وبأخذ لوغاريتم الطرفين يحـــدث

لو سـ = لو ٢٧٤ + لو ٧,٦٢٥

وحيث ان لو ٢٧٤ = ٢,٤٣٧٧٥

و لو ٧,٦٢٥ = ٠,٨٨٢٢٤ يكون

لو سـ = ٣,٣١٩٩٩ ثم نبحث عن العدد المقابل لهذا اللوغاريتم فنجده ٢٠٨٩,٢٣٧ فيكون مقدار سـ أى حاصل ضرب العددين المفروضين هو ٢٠٨٩,٢٣٧

المثال الثانى ـ اذا أريد قسمة ٤٥ على ٠,٠٠٦٤ نرمز للخارج بحرف سـ فيكون

سـ = $\frac{٤٥}{٠,٠٠٦٤}$ ثم ناخذ لوغاريتم الطرفين فيحدث

لو سـ = لو ٤٥ — لو ٠,٠٠٦٤

وحيث ان لو ٤٥ = ١,٦٥٣٢١

لو ٠,٠٠٦٤ = $\bar{٣}$,٨٠٦١٨ يكون

لو سـ = ٣,٨٤٧٠٣ ثم نبحث عن العدد المقابل لهذا اللوغاريتم فنجده ٧٠٣١,١٧ ويكون هو مقدار سـ أى خارج القسمة المطلوب .

المثال الثالث ـ اذا أريد ايجاد مقدار $١,٠٥^{١٠}$ نرمز للمقدار المطلوب بحرف سـ فيكون سـ = $١,٠٥^{١٠}$ ثم نأخذ لوغاريتم الطرفين فيحدث

لو سـ = ١٠ لو ١,٠٥

وحيث ان لو ١,٠٥ = ٠,٠٢١١٩ فيكون ١٠ لو ١,٠٥ = ٠,٢١١٩٠ ثم نبحث عن العدد المقابل لهذا اللوغاريتم فنجده

١,٦٢٨٩٢٦ مقربا من مليون وحينئذ يكون مقدار س أى $١,٠٥^{١٠}$
= ١,٦٢٨٩٢٦

المثال الرابع ـ اذا أريد ايجـاد مقـدار $\sqrt[٥]{٢٤٨٨٣٢}$
نرمز لمقدار هـذا الجذر بحرف س فيكون

س = $\sqrt[٥]{٢٤٨٨٣٢}$ ثم ناخذ لوغاريتم الطرفين فيحدث

لو س = لو $\sqrt[٥]{٢٤٨٨٣٢}$ يساوى $\frac{\text{لو } ٢٤٨٨٣٢}{٥}$

وحيث ان لو ٢٤٨٨٣٢ = ٥,٣٩٥٩٠ فبقسمته على ٥ ينتج ١,٠٧٩١٨ ثم نبحث عن العدد المقابل لهذا اللوغاريتم فنجده ١٢

تمرين على اللوغاريتمات

(٨٦٦) اذا علم أن لوغاريتم ٥ = ٠,٦٩٨٩٧ فما يكون لوغاريتم ٢٥ و ١٢٥ و ٦٢٥

(٨٦٧) اذا علم أن لوغاريتم ١٠٥ = ٢,٠٢١١٩ فما يكون لوغاريتم ١٠٥٠ و ١,٠٥ و ٠,٠٠١٠٥

(٨٦٨) اذا علم أن لوغاريتم ٢ = ٠,٣٠١٠٣ وأن لوغاريتم ٦ = ٠,٧٧٨١٥ فما يكون لوغاريتم ٨ و ٩ و ١٢ و ١٨

المطلوب حل التمرينات الآتية بواسطة قواعد اللوغاريتمات

(٨٦٩) المطلوب ايجاد حاصل ضرب ٤١٢ × ٧٤٢ و ٥٠٨ × ٠,٣٩ و ٠,٠٥٤ × ٠,٠٠٨٩ و ٠,٦٥ × ٠,٧٩

(٨٧٠) المطلوب ايجاد خارج قسمة ٥١٢ : ١٢٨ و ٠,٠٧٥ : ٠,٠٠٤٨ و ٠,١٦ : ٠,٠٨٧٥ و ٣٢٥١٢ : ٩٣٨

(٨٧١) المطلوب ايجاد مقادير $٢^{٢٤}$ و $(\frac{١}{٨})^{٥}$ و $١٫٠٤٥^{١٥}$ و $١٩^{٢٠}$ و $٣٠^{١٩}$

(٨٧٢) المطلوب ايجاد مقادير

$\sqrt[٤]{٤٠٩٦}$ و $\sqrt[٥]{١٦٨٠٧}$ و $\sqrt[١٠]{١٠٢٤}$ و $\sqrt[١١]{١٧٧١٤٧}$

(٨٧٣) ابحث عن الوسط المتناسب الهندسي بين ٨ و ٥١٢ والثالث المتناسب لهما والرابع المتناسب للاعداد ٧١٤ و ٢٣٨ و ٦٣٠

(٨٧٤) مامقدار أساس المتوالية الهندسـية المركبة من أحد عشر حدا الاول ٣ والاخير ٣٠٧٤

(٨٧٥) مامقدار الحد الاخير من متوالية هندسية حدها الاول ٩ وأساسها ٥ وعدد حدودها عشرة

الربح

٤٢٨ ـ الربح هو الفائدة التي تنتج من مبلغ مقترض لزمن معين بسعر معلوم

المبلغ المقترض يسمى رأس المال ـ والسعر هو ربح المائة في السنة وتقديره باتفاق المقرض والمقترض ـ والزمن هو المدة التي يكون فيها المبلغ عند المقترض

يعتبر في حساب الارباح وما شاكله أن السـنة ٣٦٥ يوما ومن المعتاد حساب اليوم الذي يحصل فيه الاقتراض من المدة واهمال اليوم الذي يحل فيه الدفع

٤٢٩ ـ الربح نوعان بسيط ومركب

الربح البســـــيط

٤٣٠ ــ الربح البسيط هو مايبقى فيه رأس المال ثابتا طول مدة الاقتراض (أى انه لايضاف ربح كل سنة الى رأس المــال).

٤٣١ ــ يبحث فى مسائل الربح عن مقدار الربح أو رأس المال أو الزمن أوالسعر متى كانت الكميات الاخرى معلومة
متى تحدّد السعر فحساب الربح يؤسس على القاعدتين الآتيتين
الاولى اذا كان الزمن ثابتا فالربح ورأس المــال يتناسبان طرديا
الثانية اذا كان رأس المــال ثابتا فالربح والزمن يتناسبان طرديا
اذا تقرر هذا نقول انـــ مسائل الربح البسيط ترجع الى مسائل القاعدة الثلاثية

٤٣٢ ــ الايراد ــ الايراد هو ربح مبلغ فى ســنة واحدة بسعر معلوم فلا يتعلق الا برأس المــال والسعر
ولنذكر المسائل المتعلقة بالربح البسيط مفصلة فنقول

٤٣٣ ــ أولا ــ حساب الربح مع معرفة رأس المــال والزمن والسعر

المسئلة الاولى مامقدار ربح ٣٤٥٠ جنيها فى مدة ثلاث ســنوات بسعر ٥ ٪

الحل حيث ان السعر ٥ فيعلم من ذلك أن ١٠٠ جنيه تربح فى سنة واحدة ٥ جنيهات وحيث أن المطلوب حساب ربح ٣٤٥٠ جنيــه

في مدة ثلاث سنوات فقد آل الامر الى مسئلة من القاعدة الثلاثية المركبة يمكن حلها باحدى الطرق السابقة وليكن بطريقة الوحدة فتوضع هكذا

مبلغ جنيه	مدة سنة	ربح جنيه
١٠٠	١	٥
٣٤٥٠	٣	س

ثم يقال حيث ان مبلغ ١٠٠ جنيه في مدة ١ سنة يربح ٥ جنيه

يكون	١	»	١	»	$\frac{٥}{١٠٠}$
ومبلغ	٣٤٥٠	»	١	»	$\frac{٣٤٥٠ \times ٥}{١٠٠}$
ومبلغ	٣٤٥٠	»	٣	»	$\frac{٣ \times ٣٤٥٠ \times ٥}{١٠٠}$
أى	٣٤٥٠	»	٣	»	٥١٧,٥

أعنى أن ربح مبلغ ٣٤٥٠ جنيه في مدة ثلاث سنوات بسعر ٥٪ هو ٥١٧ جنيها و ٥٠٠ مليم

المسئلة الثانية — ما مقدار ربح مبلغ ٧٥٠ فرنكا في مدة عشرة شهور بسعر ٦ ٪

الحل — حيث أن السعر ٦ فيعلم من ذلك أن ١٠٠ فرنك تربح في سنة أى في اثنى عشر شهرا ٦ فرنكات وحيث ان المطلوب معرفة

ربح ٧٥٠ فرنكا فى ١٠ أشهر فقد آل الامر الى مســئلة من القاعدة الثلاثية المركبة يمكن حلها باحدى الطرق السابقة هكذا

مبلغ	مدة	ربح
١٠٠ ف	١٢ شهر	٦ ف
٧٥٠	١٠	س ف

١٠٠	١٢	٦	١٠٠ : ٧٥٠ :: ٦ : سَ (١)
٧٥٠	١٢	سَ	١٢ : ١٠ :: سَ : س (٢)
٧٥٠	١٠	س	

وبضرب حدود التناسبين ١ , ٢ فى بعضهما يحدث

١٠٠ × ١٢ : ٧٥٠ × ١٠ :: ٦ × سَ : سَ × س أو

١٠٠ × ١٢ : ٧٥٠ × ١٠ :: ٦ : س ومنه

$$س = \frac{٧٥٠ \times ١٠ \times ٦}{١٠٠ \times ١٢} = ٣٧,٥$$

أعنى أن الربح المطلوب هو ٣٧,٥ فرنكا

المسئلة الثـالثة ـ اقترض شخص مبلغ ١٥٠٠ فرنك بســعر ٤,٥ فى يوم ١٥ يونيه فمـا مقدار ربح هذا المبلغ اذا رده فى يوم ٨ نوفمبر من السنة عينها

الحل ـ نحسب المدة من ١٥ يونيه لغاية ٧ نوفمبر (لم يحسب يوم ٨ نوفمبر) فنجدها ١٤٦ يوما ثم يقال حيث ان السعر ٤,٥ فيعلم من ذلك أن ١٠٠ فرنك تربح فى السنة أى فى ٣٦٥ يوما مبلغ ٤,٥ فرنكات وحيث ان المطلوب معرفة ربح ١٥٠٠ فرنك فى مدة ١٤٦ يوما فقد آل الامر الى مسئلة من القاعدة الثلاثية المركبة فتوضع هكذا

مبلغ		مدة	ربح	
١٠٠	فرنك	٣٦٥ يوم	٤,٥	فرنك
١٢٠٠	»	١٤٦ »	س	»

وبحلها نجد أن $س = \frac{١٥٠٠ \times ١٤٦ \times ٤,٥}{٣٦٥ \times ١٠٠}$ أو

س = ٢٧ فرنك

المسئلة الرابعة ــ ماايراد مبلغ ٢٧٧,٢ جنيه اذا كان السعر ٤,٥ ٪

الحل – حيث أن ١٠٠ جنيه تربح ٤,٥ فالجنيه الواحد يربح $\frac{٤,٥}{١٠٠}$ ومبلغ ٢٧٧,٢ جنيه يربح مقــدارا أكبر من ذلك بمقــدار ٢٧٧,٢ مرة أى $\frac{٢٧٧,٢ \times ٤,٥}{١٠٠}$ = ١٢,٤٧٤ جنيها

اذا تأملنا فى نتائج حل المسائل السابقة نرى أن مقدار الربح يساوى حاصل ضرب رأس المـال فى الزمن فى الســعر وقسمة الحاصل على ١٠٠ اذا كان الزمن مقــدّرا بالســنين وعلى ١٢٠٠ اذا كان الزمن مقدرا بأشهر وعلى ٣٦٥٠٠ اذا كان الزمن مقدرا بايام

وأن ايراد أى مبلغ يساوى حاصل ضرب الســعر فى المبلغ وقسمة الناتج على ١٠٠

٤٣٤ – الجمــلة هى المقــدار الناتج من اضافة الربح الى رأس المـال ففى المسألة الاولى من مسائل نمرة ٤٣٣ تكون الجملة هى

٣٤٥٠ + ٥١٧,٥ = ٣٩٦٧,٥ فرنكا وفى المسئلة الثانية تكون الجملة هى

٧٥٠ + ٣٧,٥ = ٧٨٧,٥ » » الثالثة » » »

١٥٠٠ + ٢٧ = ١٥٢٧ »

٤٣٥ ـ ثانيـا ـ حساب رأس المـال مع معرفة الربح والسعر والزمن

مسـئلة ـ ما مقدار رأس المـال المقترض بسـعر ٤ ٪ وأنتج فائدة قدرها ٧,٥ جنيه فى شهرين

الحل ـ حيث ان السـعر ٤ ٪ فيفهم من ذلك أن ١٠٠ جنيه يربح فى سـنة أى ١٢ شهرا ٤ جنيه وحيث ان المطلوب معرفة مقدار المبلغ الذى يربح ٧,٥ جنيه فى شهرين فقد آل الامر الى مسـئلة من مسائل القاعدة الثلاثية المركبة توضع هكذا

مبلغ	مدة	ربح
١٠٠ جنيه	١٢ شهر	٤ جنيه
س	٢ »	٧,٥ »

وبحلها يحدث س $= \frac{٧,٥ \times ١٢ \times ١٠٠}{٤ \times ٢} =$ ١١٢٥

أعنى أن رأس المـال هو ١١٢٥ جنيها

٤٣٦ ـ ثالثـا ـ حساب الزمن مع معرفة رأس المـال والربح والسعر

مسئلة ـ فى أى مدة يربح مبلغ ٣٥٠ جنيها مبلغا قدره $\overset{\text{مليم}}{٧٥٠}$ $\overset{\text{جنيه}}{٥٧}$ اذا كان السعر ٦ ٪

الحل ـ حيث ان السـعر ٦ ٪ فيفهم من ذلك أن ١٠٠ جنيه تربح فى السـنة ٦ جنيهات وحيث ان المطـلوب معرفة المـدة

التي يربح فيها مبلغ ٣٥٠ جنيها مبلغا قدره ٥٧ جنيها و ٧٥٠ مليما أى ٥٧,٧٥٠ جنيها فقد آل الامر الى مسئلة من مسائل القاعدة الثلاثية المركبة توضع هكذا

مبلغ	سنة	ربح	
١٠٠	١	٦	جنيه
٣٥٠	س	٥٧,٧٥	»

وبحلها يحدث س = $\frac{٥٧,٧٥٠ \times ١٠٠ \times ١}{٦ \times ٣٥٠}$ = ٣ $\frac{٣}{٤}$ سنه

أعنى أن المدة المطلوبة هى $\frac{٩}{٣}$ شهر سنة

٤٣٧ ــ رابعا ــ حساب السعر مع معرفة الربح ورأس المال والزمن

مســئلة ــ بأى سعر اقترض مبلغ ٩٥٠ فرنكا وبلغت أرباحه ٤٥,٦٠ فرنكا فى مدّة ٢٩٢ يوما

الحل ــ حيث ان مبلغ ٩٥٠ فرنكا يربح فى ٢٩٢ يوما ٤٥,٦٠ فرنكا وأن السعر المطلوب هو عبارة عن ربح المائة فى السنة أى فى ٣٦٥ يوما فقد آل الامر الى مسئلة من مسائل القاعدة الثلاثية المركبة توضع هكذا

مبلغ	يوم	ربح
٩٥٠ فرنك	٢٩٢	٤٥,٦٠ فرنك
١٠٠	٣٦٥	س

وبحلها يحدث س = $\frac{٣٦٥ \times ١٠٠ \times ٤٥,٦٠}{٢٩٢ \times ٩٥٠}$ = ٦

أعنى أن السعر المطلوب هو ٦ ٪

قوانين الارباح البسيطة

٤٣٨ ـ القانون هو وضع عام يستدل منه على العمليات اللازم اجراؤها على معاليم مسائل متشابهة للحصول على مقدار المجهول فى كل منها

٤٣٩ ـ قانون الربح البسيط ـ لاجل التعميم يفرض أن مبلغا م مقترض بسعر ع لسنين عدّدها ن ويراد ايجاد ربحه البسيط فيقال حيث ان ع هو ربح المائة فى السنة فيكون ربح الواحد فى السنة $\frac{\text{ع}}{١٠٠}$ وربحه فى ن سنين هو $\frac{\text{ن ع}}{١٠٠}$ وحينئذ فربح مبلغ م هو $\frac{\text{م ن ع}}{١٠٠}$ واذا رمز للربح بحرف ر يكون

$$\text{ر} = \frac{\text{م ن ع}}{١٠٠} \quad (١)$$

وهذا هو القانون العام للربح البسيط ويعبر عنه بما يأتى

الربح البسيط يساوى حاصل ضرب رأس المال فى الزمن فى السعر مقسوما على مائة

٤٤٠ ـ من القانون السابق يمكن استخراج كل من رأس المال والزمن والسعر اذا علمت المقادير الباقية ولذلك يقال اذا ضرب طرفا المتساوية (١) فى ١٠٠ ينتج $١٠٠ \text{ ر} = \text{م ن ع}$

ثم اذا قسم طرفا هـذه المتساوية الاخيرة على التوالى على ن ع ثم على م ع ثم على م ن فينتج

$$\text{م} = \frac{١٠٠ \text{ ر}}{\text{ن ع}} \ (٢) \qquad \text{ن} = \frac{١٠٠ \text{ ر}}{\text{م ع}} \ (٣) \qquad \text{ع} = \frac{١٠٠ \text{ ر}}{\text{م ن}} \ (٤)$$

فقانون (٢) يبين ان رأس المال يساوى حاصل ضرب الربح فى ١٠٠ مقسوما على حاصل ضرب الزمن فى السعر

وقانون (٣) يبين أن الزمن يساوى حاصل ضرب الربح فى ١٠٠ مقسوما على حاصل ضرب المبلغ فى السعر

وقانون (٤) يبين ان السعر يساوى حاصل ضرب الربح فى ١٠٠ مقسوما على المبلغ فى الزمن

وليتنبه الطالب الى ان الزمن فى هذه القوانين يقدر بالسنين فاذا احتوى الزمن على أشهر أو أيام نحوّله الى كسر أو عدد كسرى من السنة

وعلى الطالب أن يحل المسائل المبينة بالنمر ٤٣٣ و ٤٣٥ و ٤٣٦ و ٤٣٧ بواسطة هذه القوانين فيتضح له موافقتها للنتائج السابقة

قانون الجملة

٤٤١ — قد ذكرنا بنمرة ٤٣٤ ان الجملة هى المقدار الناتج من اضافة رأس المال الى الربح فلايجاد قانون للجملة يقال

اذا فرض أن جنيها واحدا مقترضا بسعر ع يكون ربحه فى سنة هو $\frac{ع}{١٠٠}$ وفى سنين عددها ن هو $\frac{ع \times ن}{١٠٠}$ فاذا رمز للمقدار $\frac{ع}{١٠٠}$ الذى هو ربح الوحدة بحرف ب يكون ربح الجنيه فى سنين عددها ن هو ب ن ويكون جملته فى هذه السنين هو ١ + ب ن

واذا فرض أن مبلغا مقداره م ورمز لجملته بحرف حـ فمن الواضح ان جملة هذا المبلغ تكون أكبر من جملة الجنيه مرات بقدر م أى

$$حـ = م \left(١ + ب ن \right) (٥)$$

أى أن جملة أىّ مبلغ تساوى حاصل ضرب هذا المبلغ فى العدد الناتج من اضافة الواحد الى حاصل ضرب الزمن فى ربح الوحدة

ولنطبق هذا القانون على حل المسئلة الا تية

مسئلة — ما مقدار الجملة التى يجب أن يدفعها شخص اقترض مبلغ ١٠٠٠ جنيه لمدة ٤ أشهر بسعر ٥٪

الحل — يستعاض فى قانون (٥) الحروف بمقاديرها فينتج

$$ح = ١٠٠٠ \left(١ + \frac{١}{٣} \times ٠,٠٥\right)$$ أو

$ح = ١٠١٦ \frac{٢}{٣}$ جنيها مصريا وهو مقــدار مايلزم دفعــه عقب هذه المدة

٤٤٢ — من القــانون (٥) السابق يمكن استخراج رأس المال اذا علمت الجملة والزمن والسعر ويكفى لذلك أن نقسم طرفى المتساوية (٥) وهى $ح = م (١ + ب ن)$ على $١ + ب ن$ فينتج

$$م = \frac{ح}{١ + ب ن} \quad (٦)$$

أعنى ان مقدار رأس المــال يساوى خارج قسمة الجملة على العدد الناتج من اضافة الواحد الى حاصــــل ضرب الزمن فى ربح الواحدة ولنطبق ذلك على المسئلة الآتية

مسئلة — مامقدار رأس المــال المقرض بسعر ٦٪ وآل الى جملة قدرها ٨٤٠ جنيه فى سنتين

الحل — نضع فى قانون (٦) بدل الحروف مقاديرها ينتج

$$م = \frac{٨٤٠}{١ + ٢ \times ٠,٠٦} = ٧٥٠ \text{ جنيها}$$

٤٤٣ — يمكن أن يستخرج من قانون (٥) السابق مقدار الزمن أو السـعر متى علمت الجملة والمقدران الآخران ولكن لاحاجة لذلك اذ أنه متى علمت الجملة ورأس المــال فالفرق بينها يكون هو الربح ومن

الواضح أنه بمعلومية الربح مع المبلغ والسعر يمكن ايجاد الزمن بواســطة قانون (٣)

و بمعلومية الربح والمبلغ والزمن يمكن ايجاد السعر بواسطة قانون (٤) وحينئذ فأهم مايستعمل من قوانين الجملة هو قانون الجملة وقانون رأس المـال

مسائل على الربح البسيط

(٨٧٦) ماربح ١٤١٨ جنيها فى مدة ٤ سنوات بسعر ٥ ٪

(٨٧٧) ماربح ٨٦٠٠ جنيها فى مدة ٣ سنين و ٧ أشهر بسعر ٦ ٪

(٨٧٨) ماربح ١٨٢٥ فرنك فى مدة سنتين و ١٧٠ يوما بسعر ٥ و٤ ٪

(٨٧٩) ما مقدار رأس المـال المقترض بسعر ٥ ٪ اذا كان ربحه ٥٤٠ فرنك فى ٣ سنوات

(٨٨٠) مامقـــدار رأس المال المقترض بسعر ٦ ٪ اذا كان ربحه ٥و٣٧ جنيها فى ٦ شهور

(٨٨١) ما مقدار رأس المـال المقترض فى أول يناير بسعر ٤ ٪ اذا بلغ ربحه يوم ١٥ فبراير ٣١ جنيها و ٥٣٠ مليما

(٨٨٢) مامقدار الزمن الذى ربح فيه مبلغ ٧٦٠٠ قرش مبلغا قدره ١٥٢٠ قرشا بسعر ٥ ٪

(٨٨٣) مامقدار الزمن الذى ربح فيه مبلغ ٩٠٠٠ فرنك مبلغا قدره ٧٢٩ فرنك بسعر ٥و٤ ٪

(٨٨٤) مامقدار الزمن الذى ربح فيه مبلغ ٨٧٥٠ جنيها مبلغا قدره ٥و١٢٢ جنيها بسعر ٥و٣ ٪

(٨٨٥) بأى سعر اقترض مبلغ ٦٠٠٠ جنيه اذا كان ربحه ٥٤٠ جنيها فى سنتين

(٨٨٦) بأى سعر اقترض مبلغ ٨٠٠٠ شلن اذا كان ربحه ٩٣ شلن و ٤ بنسات فى شهرين

(٨٨٧) بأى سعر اقترض مبلغ ١٣٦ جنيه مصرى و ١٦٠ جنيه انجليزى اذا كان ربحه ١٩ جنيها و ٧٠ مليما فى سنة و ٢٠ يوما

(٨٨٨) فى يوم ٢٠ مارث اقترض شخص ٨٠٠ جنيه بسعر ٦ ٪ فما مقدار مايجب أن يرده فى يوم ١٢ دسمبر من السنة عينها

(٨٨٩) طولبت ورثة بمبلغ ٢١٧٨ قرش قيمة ما كان اقترض مورثهم مع ربحه بسعر ٦ ٪ عن مدة ٣ سنوات و ٦ أشهر فما مقدار المبلغ الذى كان اقترضه

(٨٩٠) شخص له مبلغ ينتج منه ايراد سنوى ١٩٢ جنيها بسعر ٤ فما مقدار هـذا المبلغ

(٨٩١) شخص رفض وضع مبلغ ٨٠٠ جنيه بسعر ٤ و بعد ثلاثة شهور وضع هذا المبلغ بسعر ٥ مدة الاشهر الباقية من السنة فهل حسن انتظاره

(٨٩٢) هل الارجح وضع مبلغ ١٥٠٠٠ قرشا بسعر ٣ ٪ أم وضع $\frac{٢}{٥}$ هذا المبلغ بسعر ٢٫٥ ٪ و باقى المبلغ بسعر ٣٫٥ ٪

(٨٩٣) شخص اقترض مبلغ ١٥٠٠ فرنك بسعر ٥ فدفع ثلث هـذا المبلغ بعد ٣ أشهر و باقيه مع الربح فى آخر السنة فما مقدار مادفعه أخيرا

(٨٩٤) شخص اقترض مبلغ ٣٠٠ جنيه بسعر ٥ ٪ و بعد سنة رد ١٠٠ جنيه و بعد سنة أخرى رد ١٠٠ جنيه ثم بعد سنة ثالثة رد مابقى عليه والارباح فما مقدار مادفعه أخيرا

(٨٩٥) أعطى رجل جميع ما يملكه لاولاده الا مبلغا يأتيه منه ايراد شهرى قدره ٢٠٠ فرنك بسعر ٤ ٪ وهـذا المبلغ يعادل ربع ماله فما مقدار ما كان يملكه

(٨٩٦) مبلغ ١٢٠٠٠ فرنك قسم الى جزأين فوضع أحدهما بمحل ليربح بسعر ٤ ٪ وثانيهما فى محل آخر ليربح بسعر ٦ ٪ لحصل منه ايراد يعادل ايراد المبلغ جميعه بسعر ٤٫٥ والمطلوب معرفة مقدار كل من الجزأين

(٨٩٧) سايح عند قيامه للسياحة وضع فى بنك ١٠٠٠ جنيه انجليزى لتربح ربحا بسيطا بسعر ٣ ٪ وعند عودته استلم مبلغ ٩٨٦ جنيه مصرى و ٧٠٠ مليم قيمة ما كان وضعه مع أرباحه فما المدة التى قضاها فى السياحة

(٨٩٨) بعدكم سنة يصير ربح أى مبلغ مساويا له اذا كان السعر ٥ ٪

(٨٩٩) اقسم الفائدة التى تنتج من ربح ١٠٠٠ جنيه بسعر ٥ ٪ مدة سنتين و ٢١٩ يوما بين شخصين بحيث يأخذ أحدهما $\frac{3}{4}$ ما يأخذه الآخر

(٩٠٠) شخص عنده مبلغ ٤٥٠٠ جنيه فهل الارجح له أن يشترى به أرضا بسعر الفدان ٦٠ ويمكن ايجار الفدان فى السنة بمبلغ ٤٫٥ جنيه (بعد المصاريف) أو يضعه فى مشروع يربح ٧ ٪ فى السنة

(٩٠١) شخص قسم ماله الى ثلاثة أقسام فوضع الاول بسعر ٤٫٥ مدة ٣ سنوات و ٨ أشهر ووضع الثانى الذى هو ضعف الاول بسعر ٥ مدة ٣ سنوات و ٦ أشهر ووضع الثالث الذى هو ثلاثة أمثال الثانى بسعر ٤ مدة ٣ سنين و ٩ أشهر فكان مجموع الارباح ١٤١٥٠ فرنكا فما مقدار كل جزء منها

(٩٠٢) ما السعر الذى ينتج بواسطته ربح ضعف رأس المال فى مدة ٣٠ سنة

(٩٠٣) شخص وهب لولدى أخيه ربح مبلغين بسعر ٣ ٪ واشترط أن لا يأخذ كل منهما ما يخصه الا اذا بلغ سن الخامسة والعشرين وكان سن الاكبر وقتئذ ١٣ سنة وسن الاصغر ١٠ سنين وببلوغ كل منهما سن ٢٥ أخذ ١٨٠٠ جنيه والمطلوب معرفة المبلغين الاصليين

(٩٠٤) مامقدار المبلغ الذى يمكن أن يسدد من ربحه فى مدة ٣ سنين بسعر ٥ ٪ ثمن قطعة أرض مساحتها ٧٢٠ مترا مربعا وثمن الذراع المعمارى المربع ٠٫٥ جنيه

(٩٠٥) قسم رجل أمواله الى ثلاثة أقسام مختلفة فكان الاول $\frac{3}{5}$ الثانى والثالث يعادل مجموع القسمين الآخرين واشترى بالقسم الاول عقارا ايراده السنوى ٥ ٪ وبالقسم الثانى أرضا ايرادها السنوى ٤ ٪ واستعمل القسم الثالث فى تجارة ربحت ٣ ٪ وكان مجموع ايراده ١٤٩٥ جنيها فما أصل ماله

(الربح المركب)

٤٤٤ ـ الربح المركب هو ربح المبلغ المقترض وأرباح أرباحه ففيه يضاف ربح كل ســنة الى رأس المــال ويجعل الناتج رأس مال جديد ليربح فى السنة التالية

مجموع المبلغ المقترض والارباح يسمى بالجملة ومن الواضح أن الفرق بين الجملة والمبلغ المقترض هو مقدار الربح المركب

ويدخل فى حساب الارباح المركبــة وما يتعلق بهــا ربح الواحدة بدلا عن السعر

ويتعلق بحساب الارباح المركبــة أربع مسائل ـ الاولى حساب الجملة ـ الثانية حساب رأس المــال ـ الثالثة حساب الزمن ـ الرابعة حساب السعر وسنأتى بها مفصلة فنقول

٤٤٥ ـ أولا ـ حساب الجملة مع معرفة رأس المــال والزمن والسعر

مسئلة ـ مامقدار الجمــلة التى يؤل اليها مبلغ ٥٠٠ جنيه مقترضا بالربح المركب بسعر ٥ ٪ لمدة ٣ سنين

الحل ـ نبحث عن ربح ٥٠٠ جنيه فى سنة بسعر ٥ ٪ فنجده ٢٥ وباضافته الى رأس المال ينتج ٥٢٥ جنيه وهذا المبلغ يعتبر رأس مال جديد فى أول السنة الثانية ويكون ربحه فى هذه السنة بسعر ٥ ٪ هو ٢٦,٢٥ جنيها وباضافته الى رأس مال السنة الثانية ينتج ٥٥١,٢٥ جنيها

وهذا المبلغ يعتبر رأس مال جديد فى أول السنة الثالثة ويكون ربحه فى هذه السنة بسعر ٥ ٪ هو ٢٧,٥٦٢٥ وباضافته الى رأس مال السنة الثالثة ينتج ٥٧٨,٨١٢٥ جنيها وهو جملة مبلغ ٥٠٠ جنيه بالربح المركب لمدة ٣ سنين بسعر ٥ ٪

٤٤٦ — قد شاهدنا من حل المسئلة السابقة أنه يلزم تكرار اضافة ربح كل سنة الى رأس مالها ثم البحث عن ربح الناتج وفى هذا اطالة فى العمل اذا كان مقدار الزمن كبيرا

ولنبحث عن قاعدة بها يمكن حساب الربح المركب لأى مبلغ فى مدة ما من الزمن ولذلك نرمز للمبلغ المقترض بحرف م ولربح الوحدة بحرف ب وللزمن بحرف ن ثم يقال اذا فرض أن جنيها واحدا ربحه فى السنة ب تكون جملته فى آخر السنة هى ١ + ب وحينئذ فالمبلغ المرموز له بحرف م يؤل آخر السنة الاولى الى جملة قدرها م (١ + ب) وهذا المبلغ يعتبر رأس مال جديد فى السنة الثانية وتكون جملته فى آخر هذه السنة هى م (١ + ب) (١ + ب) = م $(١ + ب)^{٢}$ وحيث ان هذا المبلغ يعتبر رأس مال جديد فى أول السنة الثالثة تكون جملته فى آخر هذه السنة هى م $(١ + ب)^{٢}$ (١ + ب) = م $(١ + ب)^{٣}$ وبالاستمرار على ذلك يعلم أن رأس المال يؤل بعد مضى السنين المرموز لها بحرف ن الى م $(١ + ب)^{ن}$ فاذا رمز للجملة بحرف ح يكون

$$ح = م (١ + ب)^{ن} \qquad (١)$$

أعنى أن جملة أىّ مبلغ يربح ربحا مركبا تساوى حاصل ضرب رأس المال فى مجموع الواحد وربحه مرفوعا ذلك المجموع الى قوة بقدر عدد السنين

مسئلة ـ المطلوب معرفة مقدار مايؤل اليه مبلغ ١٠٠٠٠ ق عقب ١٦ سنة مقترضا بالربح المركب بسعر ٥ ٪

الحل ـ نضع فى القانون السابق بدل الحروف مقاديرها فينتج

ح = ١٠٠٠٠ × ١,٠٥ ^١٦^ تأخذ لوغاريتم الطرفين فيكون

لو ح = لو ١٠٠٠٠ + ١٦ لو ١,٠٥ ثم نبحث عن هذه اللوغاريتمات فنجد لو ١٠٠٠٠ = ٤,١٧٦٠٩ ولو ١,٠٥ = ٠,٠٢١١٩ فيكون

لو ح = ٤,١٧٦٠٩ + ١٦ × ٠,٠٢١١٩
أو لو ح = ٤,١٧٦٠٩ + ٠,٣٣٩٠٤ أو
لو ح = ٤,٥١٥١٣ يكون العدد المقابل لهذا اللوغاريتم وهو ٣٢٧٤٣,٨ هو مقدار ح أو ح = ٣٢٧٤٣,٨ قرشا

ويصح أن نبحث عن مقدار ١,٠٥ ^١٦^ فقط بواسطة اللوغاريتم ثم نضرب الناتج فى ١٠٠٠٠

٤٤٧ ـ تنبيه اذا كان الزمن محتويا على أشهر أو أيام خلاف السنين فبعد ايجاد الجملة بالنسبة لعدد السنين تعتبر رأس مال ونبحث عن ربحها فى الايام أو الاشهر الزائدة عن السنين

فاذا أريد ايجاد جملة الربح المركب لمبلغ ١٥٠٠٠ قرش بسعر ٥٫٠٪ مدة $\frac{8}{16}$ أشهر $\frac{\text{سنة}}{16}$ سنة نبحث عن الجملة فى $\frac{\text{سنة}}{16}$ فنجدها ٣٢٧٤٣٫٨ ثم نبحث عن ربح هذه الجملة فى ٨ أشهر فنجده ١٠٩١٫٥٠ فتكون الجملة المطلوبة ٣٣٨٣٥٫٣

٤٤٨ ـ تنبيه يراد فى بعض الاحيان أن يضاف الربح كل ٦ أشهر ولذلك يستعمل القانون (١) السابق غير أنه يوضع فيه نصف ربح الوحدة بدلا عن ربحها وضعف عدد السنين بدلا عنها

مثال مبلغ ٦٠٠٠ جنيه مقترض بربح مركب بسعر ٥٫٠٪ لمدة $\frac{\text{سنين}}{٤}$ و ٦ أشهر بحيث تضاف الارباح كل ٦ أشهر فما تكون جملته عقب هذه المدة

الحل ـ نستعمل القانون ح = م (١+ب)^{ن} ويجعل فيه ن = ٩ و ب = ٠٫٠٢٥

فيكون ح = ٦٠٠٠ × ١٫٠٢٥^{٩} وبعمل الحساب نجد أن ح = ٧٤٠٦٫٨٣٣ جنيه

٤٤٩ ـ واذا أريد اضافة الربح كل ٣ أشهر فنبحث عن عدد مرات احتواء المدة على ٣ أشهر وعن ربح المائة فى ٣ أشهر ثم نضع فى القانون السابق بدل الزمن عدد مرات احتواء المدة على ٣ أشهر وبدلا عن ربح الوحدة فى سنة ربحها فى ٣ أشهر

مثال مبلغ ٥٠٠٠ جنيه مقترض بربح مركب بسعر ٨٫٠٪ لمدة ٣ سنين و ٩ أشهر بحيث تضاف الارباح كل ٣ أشهر فما جملته عقب هذه المدة

الحل ـ نستعمل قانون الجملة السابق وهو ح = م $(١+ب)^{ن}$ ويجعل فيه ن = ١٥ و ب = ٠,٠٢ .

فنجد أن ح = ٥٠٠٠ × $١,٠٢^{١٥}$ ويعمل الحساب نجد

ح = ٦٧٢٩,٤٨٥

٤٥٠ ـ ثانيا ـ حساب رأس المال مع معرفة الجملة والزمن والســـعر

من قانون جملة الربح المركب الذى هو ح = م $(١+ب)^{ن}$ يمكن استخراج م بقسمة الطرفين على $(١+ب)^{ن}$ فينتج

$$م = \frac{ح}{(١+ب)^{ن}} \quad (٢)$$

مسئلة ـ مامقـدار المبلغ المقترض بسعر ٦٪ حتى آل الى جملة مقدارها ١٤٣٢٨,٠٦٥ جنيه بعد ١٠ سنين

الحل ـ نغير فى القانون (٢) الحروف بمقاديرها فيحدث

$م = \frac{١٤٣٢٨,٠٦٥}{١,٠٦^{١٠}}$ ثم نأخذ لوغاريتم الطرفين فيحدث

لو م = لو ١٤٣٢٨,٠٦٥ — ١٠ لو ١,٠٦ ثم نبحث عن هذه اللوغاريتمات

فنجد لو ١٤٣٢٨,٠٦٥ = ٤,١٥٥١٩, ولو ١,٠٦ = ٠,٠٢٥٣١

فيكون ١٠ لو ١,٠٦ = ٠,٢٥٣١٠ ويكون

لو م = ٣,٩٠٢٠٩ وبناء عليه يكون م = ٨٠٠٠ جنيه

٤٥١ ـ ثالثا ـ حساب الزمن مع معرفة الجملة ورأس المال والسعر

من قانون جملة الربح المركب يمكن استخراج مقدار الزمن ولذلك يقال

حيث ان ح = م (١+ب)^ن فاذا أخذ لوغاريتم الطرفين يحدث
لو ح = لو م + ن لو (١ + ب) وبطـرح لو م من الطرفين يحدث
لو ح — لو م = ن لو (١ + ب) وبقسمة الطرفين على لو(١ + ب) ينتج

$$ن = \frac{\text{لو ح — لو م}}{\text{لو(١ + ب)}} \quad (٣)$$

مسئلة — مبلغ ١٨٠٠ شلن مقترض بالربح المركب بسعر ٤ ٪ وآل بعد مدة الى ٢٨٨١,٦٠٢ شلنا والمطلوب معرفة مدة الاقتراض

الحل — نضع فى القانون (٣) بدل الحروف مقاديرها فينتج

$$ن = \frac{\text{لو ٢٨٨١,٦٠٢ — لو ١٨٠٠}}{\text{لو ١,٠٤}}$$ ثم نبحث عن مقادير هذه اللوغاريتمات فيحدث $$ن = \frac{٣,٤٥٩٦٣ — ٣,٢٥٥٢٧}{٠,٠١٧٠٣}$$ أو

ن = ١٢ سنة

٤٥٢ — رابعا — حساب السعر مع معرفة الجملة ورأس المال والزمن

من قانون جملة الربح المركب يمكن استخراج مقـدار ربح الوحدة ومنه يعلم السعر ولذلك يقال حيث ان

ح = م(١+ب)^ن فبأخذ لوغاريتم الطرفين ينتج
لو ح = لو م + ن لو(١ + ب) وبطـرح لو م من الطرفين والقسمة على ن ينتج

$$\frac{\text{لو ح — لو م}}{ن} = \text{لو(١ + ب)} \quad (٤)$$

أعنى أنه يطرح لوغاريتم المبلغ من لوغاريتم الجمــلة ويقسم البــاقى على عدد الســنين والخارج يكون مقدار مجموع لوغاريتم الواحد وربحه فاذا بحث عن العدد المقابل له ينتج الواحد وربحه ثم يطرح منه واحد ويضرب الباقى فى ١٠٠ ينتج السعر المطلوب

مسئلة — بأى سعر اقترض مبلغ ٤٠٠٠ جنيه بالربح المركب حتى بلغت جملته بعد ١٥ سنة ٧٧٤٢٫٠٨٠ جنيها

الحل — نضع فى قانون ٤ بدل الحروف مقاديرها ينتج

$$\frac{\text{لو } \text{٧٧٤٢٫٠٨٠} - \text{لو } \text{٤٠٠٠}}{\text{١٥}} = \text{لو}(\text{١} + \text{ب})$$

$$\text{أو } \frac{\text{٣٫٨٨٨٨٥} - \text{٣٫٦٠٢٠٦}}{\text{١٥}} = \text{لو}(\text{١} + \text{ب}) \text{ أى}$$

$$\text{٠٫٠١٩١٢} = \text{لو}(\text{١} + \text{ب})$$

ثم نبحث عن العدد المقــابل لهــذا اللوغاريتم فينتج ١ + ب = ١٫٠٤٥ وحينئــذ يكون ب = ٠٫٠٤٥ ويكون ١٠٠ ب = ٤٫٥ أى ع = ٤٫٥ ٪

(مسائل على الارباح المركبة)

(٩٠٦) شخص اقترض مبلغ ٧٢٠٠ فرنك لمدة ٥ سنين بسعر ٤ ٪ فما مقدار مايلزم أن يدفعه عقب هذه المدة

(٩٠٧) مامقدار رأس المال المقترض بسعر ٦ ٪ لمدة ١٢ سنة وآل الى جملة قدرها ١٢٠٧٤٫٤٤ فرنك

(٩٠٨) فى أى مدة يؤل مبلغ ١٢٠٠ جنيه مقترضا بسعر ٤٫٥ ٪ الى جملة قدرها ١٤٣١ جنيها و ٦٦ مليما

(٩٠٩) شخص اقترض مبلغ ٥٠٠ جنيها وبعد ٣ سنين رد مااقترضه وأرباحه المركبة التي قدرها ٩٥ جنيها و ٥٢٩ مليما فما سعر الربح

(٩١٠) شخص اقترض مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه لمدة ٥ سنوات بسعر ٣٫٥ ٪ ثم اقرض نصف هذا المبلغ لشخص بسعر ٤٫٥ ٪ لمدة ٤ سنوات ولآخر باقيه لمدة ٤ سنوات أيضا بسعر ٥ ٪ فما فائدته من ذلك

(٩١١) وثيقة محررة بمبلغ ٦٩٤ جنيها و ٥٨٣ مليما قيمة مااقترضه شخص مضافا اليه الربح المركب بسعر ٥ ٪ لمدة ٣ سنين فما مقدار المبلغ المقترض

(٩١٢) مزارع اشترى ٥٠٠ فدان بسعر الفدان ٦٠ جنيها ودفع $\frac{٣}{٥}$ الثمن وأجل دفع الباقى فحسب عليه بالارباح المركبة بسعر ٣٫٥ ٪ ولهذا دفع بعد مدة مبلغ ١٤٢٥٢ جنيها و ٢٥٨ مليما والمطلوب معرفة هذه المدة

(٩١٣) تاجر اشترى بضائع بمبلغ ٦٠٠ جنيه ودفع نصف الثمن وحرر وثيقة بمبلغ ٣٣٠٫٧٥ جنيها قيمة الباقى عليه وارباحه المركبة لمدة سنتين فما السعر الذى حسب به هذا الربح

(٩١٤) فدان ارض كان ثمنه ٧٢ جنيها ومرت ملكيته بين ١٠ أشخاص وكان كل واحد يبيعه بأرباح قدرها ٥ ٪ من ثمن مشتراه فامقدار مادفعه المشترى العاشر

(٩١٥) خاتم من الماس كان ثمنه ٣١٫٥ جنيها بيع أولا بربح ٣ ٪ ثم ثانيا بربح ٣ ٪ أيضا من الثمن الذى اشترى به وهكذا فما ثمن الخاتم عند وصوله للمشترى الخامس

(٩١٦) اوجد الفرق بين الربح البسيط والمركب لمبلغ ٨٠٠٠ جنيه بسعر ٦ ٪ لمدة ٥ سنين

(٩١٧) احسب الربح المركب لمبلغ ٣٠٠ جنيه مقترضا بسعر ٥ ٪ بحيث يضاف الربح فى كل ٦ أشهر

(٩١٨) اذا كان الفرق بين الربح البسيط والمركب لمبلغ مقترض بسعر ٥ ٪ لمدة سنتين هو جنيه واحد فما مقدار هذا المبلغ

(٩١٩) اقترض مبلغ بربح مركب فكان ربحه فى آخر السنة الاولى ٨١ جنيها وفى آخر السنة الثانية ٨٥٫٨٦٠ والمطلوب معرفة المبلغ والسعر

(٩٢٠) احسب الربح المركب لمبلغ ١٥٠٠ جنيه مقرضا بربح مركب بسعر ٢ ٪ عن كل ٤ أشهر ويضاف الربح كل ٤ أشهر

(الحطيطة)

٤٥٣ ـ تمهيد ـ قد جرت العادة فى الاعمال التجارية أن يؤجل دفع ثمن البضائع كله أو بعضـه لمدّة يتفق عليها وفى هـذه الحالة يحرر المدين وثيقة (كمبيالة) للدائن يذكر فيها مقدار الدين واليوم الذى اتفق على الدفع فيه والمكان الذى يدفع فيـه وقبل حلول يوم الدفع لايكون للدائن حق فى مطالبة المدين بمقدار الدين فاذا اضطر الدائن الى نقود عاجلة قبل حلول الميعاد جاز له أن يتنازل عن الوثيقة لاحد الصيارف ويترك له فى نظـير ذلك مبلغا يتفق عليه فالمبلغ الذى يحجزه الصراف يسمى حطيطة

وكما تكون الوثيقة بأثمـان بضائع قد تكون بمبالغ مقترضة

اذا تقرر هذا فيسهل معرفة مايراد بالحطيطة من التعريف الا تى

٤٥٤ ـ الحطيطة هى مايحجز من وثيقة اذا أريد استلام قيمتها قبل حلول ميعادها

ويتفق فى الحطيطة على مقدار مخصوص هو حطيطة المائة فى سنة ويسمى السعر

٤٥٥ ـ القيمة الاسمية هى المبلغ المبين فى الوثيقة

٤٥٦ ـ القيمة الحالية هى ما يستلمه صاحب الوثيقة

٤٥٧ ـ مسائل الحطيطة تتعلق بقيمة الوثيقة والزمن والسعر والحطيطة ومتى علم ثلاث من هذه الكميات أمكن ايجاد الكمية الرابعة

٤٥٨ ـ الحطيطة نوعان خارجيـة وداخلية وسنبين كلا منهما فنقول

(الحطيطة الخارجية)

٤٥٩ ـ الحطيطة الخارجية هى عبارة عن الربح البسيط للقيمة الاسمية للوثيقة من يوم الدفع الى يوم حلول ميعادها بسعر معلوم

ويؤخذ من ذلك أن حسابها كحساب الربح البسيط ويتعلق به أربع مسائل تحل كما تقدم فى الربح البسيط

ولزيادة الايضاح نذكر المسئلة الآتية وكيفية حلها فنقول

مسئلة ـ وثيقة بمبلغ ١٨٠٠ فرنك تستحق الدفع بعـد ٧٣ يوما مامقدار حطيطتها الخارجية بسعر ٥ ٪

الحل ـ لذلك يستعمل قانون الربح البسيط ويغير فيـه حرف ر (رمز الربح) بحرف ح الذى يجعل رمزا للحطيطة فيكون

$$ح = \frac{م ن ع}{١٠٠}$$

وباستبدال الحروف بمقاديرها ينتج

$$ح = ١٨٠٠ \times \frac{٧٣}{٣٦٥} \times \frac{٥}{١٠٠} = ١٨ \text{ فرنكا}$$

أعنى أن الحطيطه هى ١٨ فرنكا وحينئذ تكون القيمة الحاليـة للوثيقة هى ١٨٠٠ — ١٨ = ١٧٧٢ فرنك

٤٦٠ ـ تنبيه ـ حيث ان مسائل الحطيطة الخارجيـة هى كمسائل الربح البسيط فيكتفى بذكر المسـئلة السابقة وعلى الطالب أن يشـتغل بحل المسائل المتعلقة بايجاد قيمة الوثيقة أو الزمن أو السعر متى علمت الثلاث كميات الاخرى

(الحطيطة الداخلية)

٤٦١ ـ الحطيطة الداخلية هى ربح القيمة الحالية للوثيقة من يوم الدفع الى يوم حلول ميعادها بسعر معلوم

ولنوضح ذلك بحل المسئلة الا تية فنقول

مسـئلة ـ مامقدار الحطيطة الداخلية لوثيقة بمبلغ ١٨٠٠ فرنك تستحق الدفع بعد ٧٣ يوما بسعر ٥ ٪

الحل ـ نبحث عن القيمة الحالية للوثيقة أى نبحث عن المبلغ الذى اذا أضيف اليه ربحه فى ٧٣ يوما بسعر ٥ ٪ ينتج المبلغ المبين فى الوثيقـة ولذلك نفرض مبلغا اختياريا وليكن فرنكا واحدا ونبحث عن ربحه فى ٧٣ يوما بسعر ٥ ٪ فنجد أن مقدار الربح هو ١٠٫٠ ف ثم يضاف الى الفرنك فينتج ١٫٠١ ف ويقـال اذا كانت وثيقـة بمبلغ ١٫٠١ ف تستحق الدفع بعد ٧٣ يوما تكون قيمتها الحالية بسعر ٥ ٪ هى فرنك واحد فالوثيقـة التى بمبلغ فرنك واحد تكون قيمتها $\frac{١}{١٫٠١}$

والوثيقة التى بمبلغ ١٨٠٠ فرنك تكون قيمتها الحاليــة $\frac{١٨٠٠}{١٫٠١}$ (١)
أى ١٧٧٢٫١٨ وهذا المقدار هو ما يستلمه صاحب الوثيقة واذن
فقيمةالحطيطة الداخلية هى ١٨٠٠ — ١٧٧٢٫١٨ = ١٧٫٨٢ فرنكا

٤٦٢ ـ ويمكن أن يستخرج مقدار الحطيطة الداخليــة عوضا
عن استخراج القيمة الحاليــة ولذلك يقال حيث ان الوثيقة التى بمبلغ
١٫٠١ ف قيمتها الحالية ١ ف فتكون حطيطتها ٠٫٠١ فاذا فرض وثيقة
بمبلغ فرنك واحد تكون حطيطتها الداخليــة $\frac{٠٫٠١}{١٫٠١}$ والوثيقــة التى بمبلغ
١٨٠٠ فرنك تكون حطيطتها الداخلية $\frac{٠٫٠١ \times ١٨٠٠}{١٫٠١}$ (٢)
ويمكن أن يعبر عن مقدار القيمة الحاليــة للوثيقة ومقدار الحطيطة
الداخلية بالقانونين الاتيين المستنبطين من الوضعين (١) و(٢)

٤٦٣ ـ مقدار القيمة الحالية لوثيقة بعد حجزحطيطتها الداخلية
يساوى خارج قسمة القيمة الاسمية على مجموع الواحد وربحه فى المدة
المعينة بالسعر المعلوم

٤٦٤ ـ مقدار الحطيطة الداخلية لوثيقة يساوى حاصل ضرب
القيمة الاسمية فى ربح الواحد فى المــدة المعينة بالسعر المعلوم وقسمة
الناتج على مجموع الواحد وربحه المذكور

٤٦٥ ـ تنبيه (١) حيث ان الحطيطة الداخلية هى ربح القيمة
الحالية للوثيقة ومن الواضح أنه باضافة القيمة الحالية الى مقدار الحطيطة
تنتج القيمة الاسمية فيمكن حساب القيمة الحالية من قانون الجملة
المذكور بنمرة (٤٤١) وكذلك يمكن بواسطته حساب السعر أو الزمن

أو المبلغ متى علمت الكميات الثلاث الاخرى وعلى الطالب أن يشتغل بايجاد هذه المقادير متى علمت ثلاثة منها

٤٦٦ ـ تنبيه (٢) الفرق بين الحطيطة الداخلية والخارجية لوثيقة واحدة بسعر واحد يساوى ربح الحطيطة الداخليــة بالسعر والمدة عينهما

فاذا كانت وثيقــة بمبلغ ١٨٠٠ فرنك تستحق الدفع بعد ٧٣ يوما فان مقــدار حطيطتها الخارجية بسعر ٥ ٪ هى ١٨ فرنكا كما فى نمرة ٤٥٩ ومقدار حطيطتها الداخليــة بالسعر عينــه هى ١٧٫٨٢ فرنكا كما فى نمرة ٤٦٢ والفرق بين الحطيطتين هو ٠٫١٨ ف وهذا الفرق هو ربح الحطيطة الداخليــة اذ أن ربحها فى المدة المذكورة هو $\frac{١٧٫٨٢ \times ٧٣ \times ٥}{١٠٠ \times ٣٦٥}$

$=$ ٠٫١٧٨٢ $\doteq$ ٠٫١٨ ف تقريبا

٤٦٧ ـ تنبيه (٣) اذا كانت المدة أكثر من سنة فيطلب أحيانا ان تكون الحطيطة الداخلية بحساب الربح المركب

لذلك تكون القيمة الحالية هى عبارة عن المبلغ الذى هو وربحه المركب يساوى القيمة الاسميــة للوثيقة وحينئذ فيمكن ايجــاد القيمة الحالية من قانون رأس المال فى الربح المركب المبين بنمرة (٤٥٠)

مثال ـ المطلوب حساب الحطيطة الداخلية لسند بمبلغ ١٥٤٣٫٥ شلن يستحق الدفع بعد سنتين بسعر ٥ ٪ بالربح المركب

لذلك يســتعمل القانون م $=$ $\frac{ح}{(١ + ب)^{ن}}$ ويعتبر فيــه ح القيمة الاسمية و م القيمة الحالية و ب ربح الوحدة و ن الزمن فيكون

م $=$ $\frac{١٥٤٣٫٥}{(١٫٠٥)^{٢}}$ ومنه م $=$ ١٤٠٠ شلن أى ٧٠ جنيها انكليزيا

٤٦٨ ـ قد جرت العادة في الاعمال التجارية أن تكون مدة الحطيطة أقل من سنة وحينئذ تحسب الحطيطة بالربح البسيط الا اذا طلب حسابها بالربح المركب

(مسائل على الحطيطة)

(٩٢١) وثيقة بمبلغ ١٥٠٠٠ فرنكا تستحق الدفع بعد شهرين مامقدار حطيطتها الخارجة بسعر ٥ ٪

(٩٢٢) وثيقة بمبلغ ١٨٥٠ قرش بيعت بسعر ٦ ٪ وكان مقدار حطيطتها الخارجية ١٠ ج ٤٦ فما مقدار الزمن بين يوم البيع ويوم استحقاقها

(٩٢٣) شخص استلم ٥٩٣٫٣٥ جنيها في نظير وثيقة بمبلغ ٦٠٠ جنيه كانت تستحق الدفع بعد ٣ أشهر تاركا الحطيطة الخارجية فما سعرها

(٩٢٤) بيعت وثيقة كانت تستحق الدفع بعد ٤٥ يوما بسعر ٥ ٪ فكان مقدار الحطيطة الخارجية ١ جنيه ١٦ شلن انجليزي فما القيمة الاسمية للوثيقة

(٩٢٥) وثيقة بمبلغ ٦٠٠ جنيه تستحق الدفع بعد ٣ أشهر مامقدار حطيطتها الداخلية بسعر ٤ ٪

(٩٢٦) وثيقة بمبلغ ٢٥٥٠ فرنكا بيعت بسعر ٤٫٥ ٪ وكان مقدار الحطيطة الداخلية ٥٠ فرنكا فما مقدار الزمن من يوم البيع الى يوم استحقاقها

(٩٢٧) وثيقة بمبلغ ١٢٠٠ قرش تستحق الدفع بعد أشهر بلغ مقدار حطيطتها الداخلية ١٤٫٨١ قرشا فما سعر الحطيطة

(٩٢٨) شخص استلم مبلغ ٨٧٢١ جنيه ١٦ شلن ٨ بنس في مقابلة وثيقة كانت تستحق الدفع بعد ٣ أشهر وتاركا الحطيطة الداخلية بسعر ٥ ٪ فما مقدار القيمة الاسمية للوثيقة

(٩٢٩) وثيقة تستحق الدفع بعد ٦ شهور قيمتها الاسمية ١٨٠٠ جنيه هل الارجح لصاحبها أن يبيعها بحطيطة خارجيـــة بسعر ٣و٥ ٪ أم بحطيطة داخليـــة بسعر ٣و٧٥ ٪

(٩٣٠) صراف رفض مشترى وثيقة بمبلغ ٢٥٥ جنيه تستحق الدفع بعد ١٤٦ يوما وكان صاحب الوثيقة سمح بحطيطة داخلية بسعر ٥ ٪ لكنه بعد ٥ أيام قبل مشتراها بالسعر عينه غير انه يكون الحساب عن الحطيطة الخارجية فما الفرق بين الحالتين

(٩٣١) الفرق بين الحطيطة الداخليـــة والخارجية لوثيقـــة تستحق الدفع بعـــد شهرين هو ٣ قرنك فما مقدار قيمتها الاسميـــة اذا كان الســـعر فى كل حالة هو ٦ ٪

(الاجل المتوسط أو المشترك)

٤٦٩ ـ الغرض من قاعدة الاجل المتوسط البحث عن المدة التى تدفع فى نهايتها جملة مبالغ تستحق الدفع فى مواعيد مختلفة اذا أريد دفعها فى يوم واحد

مسئلة ـ شخص عليه لآخر ثلاثة مبالغ الاول ٨٠٠ قرش ويستحق الدفع بعـــد شهرين والثـــانى ٧٠٠ قرش ويستحق الدفع بعد ٤ أشهر والثالث ٥٠٠ قرش ويستحق الدفع بعـــد ٦ شهور ويريد دفع هـــذه الديون فى يوم واحد فبعد كم شهر يدفعها

الحل ـ نفرض أن هذه المبالغ ينتفع بها المديون على حساب ٥ ٪ فتكون الفائدة التى تنتج منها هى

$$\frac{٥ \times ٢ \times ٨٠٠}{١٢٠٠} \text{ و } \frac{٥ \times ٤ \times ٧٠٠}{١٢٠٠} \text{ و } \frac{٥ \times ٦ \times ٥٠٠}{١٢٠٠}$$

وحيث ان المديون ملزم بأن يدفع $\frac{\text{جـ}}{٨٠٠} + \frac{\text{جـ}}{٧٠٠} + \frac{\text{جـ}}{٥٠٠}$ أو $\frac{\text{جـ}}{٢٠٠٠}$ فيراعى أن تكون المدة المطلوبة هى التى يربح فيها هذا المبلغ ربحا يعادل الارباح الناتجة من المبالغ المذكورة فاذا رمز لهذا الزمن بحرف ن تكون $\frac{٥ \times \text{ن} \times ٢٠٠٠}{١٢٠٠} = \frac{٥ \times ٢ \times ٨٠٠}{١٢٠٠} + \frac{٥ \times ٤ \times ٧٠٠}{١٢٠٠} + \frac{٥ \times ٦ \times ٥٠٠}{١٢٠٠}$ وبالاختصار يكون $\frac{\text{ن} \times ٢٠٠٠}{٢٤٠} = \frac{٢ \times ٨٠٠}{٢٤٠} + \frac{٤ \times ٧٠٠}{٢٤٠} + \frac{٦ \times ٥٠٠}{٢٤٠}$ أو

$$٢٠٠٠ \times \text{ن} = ٨٠٠ \times ٢ + ٧٠٠ \times ٤ + ٥٠٠ \times ٦$$ أو

$$\text{ن} = \frac{٦ \times ٥٠٠ + ٤ \times ٧٠٠ + ٢ \times ٨٠٠}{٢٠٠٠} = \frac{٧٤٠٠}{٢٠٠٠}$$ او

ن = ٣ أشهر و ٢١ يوما

أعنى أنه يجب دفع هذه المبالغ بعد ٣ أشهر و ٢١ يوما

وحيث ان السعر ٥ لادخل له فى حل المسئلة الا لتصوّر وضعها يستنتج القانون الا تى

٤٧٠ ـ لتعين الاجل المتوسط لجملة مبالغ تستحق الدفع فى مواعيد مختلفة ويراد دفعها فى وقت واحد نضرب كل مبلغ فى المدة الباقية له ونجمع حواصل الضرب ونقسم مجموعها على مجموع المبالغ فالناتج هو الاجل المتوسط المطلوب

٤٧١ ـ تنبيه (١) يراعى توحيد الازمنة أى جعلها من نوع واحد وكذا يراعى توحيد أنواع المبالغ

٤٧٢ ـ تنبيه (٢) عند اجراء عملية القسمة يكفى ايجاد الخارج الى الايام ويقرب الكسر الناتج بعدها من يوم بالزيادة أو النقص

مسائل على الاجل المتوسط

(٩٣٢) تاجر اشــترى دقيقا بمبلغ ١٢٠٠٠ فرنك بشرط أن يدفع الثمن كالآتى ٣٠٠٠ فرنك بعد ٤٠ يوما و ٤٠٠٠ فرنك بعد ٦٠ يوما و ٥٠٠٠ فرنك بعـد ٩٠ يوما فاذا أراد دفع هذا المبلغ فى وقت واحد فبعد كم يوما يدفعه

(٩٣٣) فى يوم ٢٠ يناير باع رجل من ذوى الاملاك عقارا بمبلغ ٢٨٠٠٠ جنيه بشرط أن يكون دفع الثمن كالآتى ٤٠٠٠ جنيه فى ١٥ مارث و ١٠٠٠٠ جنيه فى ٣١ مايو و ١٤٠٠٠ جنيه فى ٢٥ يوليه من الســنة المذكورة ففى أى يوم يدفع المبلغ جميعه اذا أراد دفعها فى وقت واحد

(٩٣٤) المطلوب استعاضة الوثائق الثلاث الآتية بوثيقة واحدة الاولى بمبلغ ٤٠٠ فرنك تستحق الدفع بعد ٣ أشهر والثانيــة بمبلغ ٣٠٠ فرنك وتستحق الدفع بعد ٤٥ يوما والثالثة بمبلغ ٢٥٠ فرنك وتستحق الدفع بعد ٦ شهور فما يكون زمن استحقاق الوثيقة الجديدة .

(٩٣٥) فى يوم ١٥ ينـاير أراد شخص أن يستعيض وثيقــة بمبلغ ٦٠٠٠ قرش تستحق الدفع فى يوم ٣١ مارث بوثيقتين يكون مجموع قيمتهما مساويا للقيمــة الاسمية للوثيقة المذكورة غير أن احداهــما تكون بمبلغ ٢٠٠٠ قرش وتدفع بعـد ٦٠ يوما والثانية بالمبلغ الباقى ففى أى يوم يكون استحقاق دفعها

الاسهم والسندات

٤٧٣ ـ تمهيد ـ اذا اتحد شخصان أو أكثر فى عمل تجـارى ووضــع كل منهم مبلغا فذلك يسمى بالشركة وكل شخص منهم يسمى شريكا ومجموع المبـالغ التى وضعها الشركاء يسمى رأس المـال . فاذا حسبت المكاسب وطرحت منهـا المصاريف كان البـاقى هو الربح الصافى فيقسم بين الشركاء بنسبة مادفعه كل منهم

٤٧٤ ـ رأس المال يكون مناسبا للشروع الذى تقوم به الشركة فاذا كان العمل صغيرا كان رأس المال كذلك وأمكن كل شريك أن يقوم بجزء من العمل و يكون عضوا عاملا

أما اذا كان المشروع كبيرا كانشاء سكة حديدية أو شركة بناء أو غيرهما فرأس المال يكون كبيرا مثل مليون جنيه وحينئذ فيلزم لتكوينه تعاضد عدد كبير من المشتركين قد يبلغ عددهم ٢٠٠٠٠ نفس وفى هذه الحالة لايمكن أن يكون كل شريك عضوا عاملا (اذ بذلك يحصل ارتباك العمل وعطله) وانما ينتخب عدد قليل من الاعضاء من ذوى الخبرة واللياقة لادارة شؤن الشركة

٤٧٥ ـ عند تأسيس شركة جسيمة يتفق الخبيرون بالموضوع على تقدير رأس المال فاذا فرض أنه يلزم ٣٠٠٠٠٠ جنيه يقسم هذا المبلغ الى ٦٠٠٠٠ قسم كل منها خمسة جنيهات أو الى ٣٠٠٠٠ قسم كل منها عشرة جنيهات أو الى ٣٠٠٠ قسم كل منها مائة جنيه وكل قسم يسمى سهما فيقال سهم ذو خمسة جنيهات وسهم ذو عشرة جنيهات وسهم ذو مائة جنيه ولكن المصطلح عليه فى هذه الحالة أن يقال سند بمائة جنيه وثلاثة أقسام منها تسمى ٣٠٠ جنيه سندات وهكذا كل مقدار

٤٧٦ ـ الفرق بين السند والسهم هو أنه فى حالة ما اذا كان رأس مال الشركة فى شكل سندات أمكن الحصول على أى مقدار من السندات ولكن فى حالة ما اذا كان مقسما الى أسهم فلا يمكن الحصول الا على أسهم كاملة أى لايمكن شراء أو بيع جزء من سهم

٤٧٧ ـ بعد تقدير رأس مال الشركة وقيمة السهم وعدد الاسهم تعرض الشركة على الجمهور بيع هـــذه الاسهم ويمكن لشخص واحد أن يكتتب بعدد مّا من الاسهم أو أى قيمة من الســـندات فاذا زاد مقدار الا كتتابات عن رأس مال الشركة قرر أعضاء الادارة مايأخذه كل مكتتب

٤٧٨ ـ الشركاء فى شركة كبـــيرة يقـــال لهم حاملى الاســـهم أو الســـندات والهيئة المكونة منهم تسمى شركة مساهمة وفى أوقات معينة (عادة كل نصف ســـنة) يعمل الحساب ويدفع للمديرين قيمة أتعابهم وتدفع جميع المصـــاريف ثم يقسم الربح الصافى باعتبار ســـعر ينفق عليـــه للسهم الواحد أو لكل مائة جنيه من الســـندات ويدفع لحاملى الاسهم والسندات وهذا الربح يسمى الايراد

٤٧٩ ـ لايجوز لاحد من المشـــتركين أن يســـتردّ أمواله من الشركة ولكن يمكنه أن يبيع سنداته أو أسهمه لشخص آخر ويوجد لذلك سوق يسمى سوق الســـندات (البورصـــة) وأعمال هذا السوق تجرى بواســـطة سماسرة فعلى البائع أن يعرّف السمسار بمقدار مايرغب بيعه وعلى السمسار أن يبحث عن مشتر راغب فى ذلك وبعمل هذه المبايعة يأخذ السمسار جعلا يتفق عليـــه عن كل سهم أو ١٠٠ جنيه سندات تباع بمعرفته وهذا المقدار يسمى بالسمسرة وعادة تكون $\frac{١}{٨}$ ٪ والثمن الذى يدفع عن كل سهم أو كل ١٠٠ جنيه ســـندات يسمى سعر السوق .

٤٨٠ ــ أسعار الاسهم والسندات الجارى تداول بيعها فى بلد تكتب عادة فى جرائدها اليومية ومما ينبغى ملاحظته أنه قد يكتب سعران أمام السند أو السهم مثل $\frac{١}{٨}$ ١٠٨ و $\frac{٣}{٨}$ ١٠٨ ومعنى ذلك أن الثمن الاوّل يقدّمه السمسار للبائع والثانى للمشترى والفرق بينهما هو السمسرة

وعموما فى حالة تقدير ثمن السهم سواء كان فى البيع أو الشراء تحسب المصاريف الاضافية مثل السمسرة وورق التمغة وتحويل المبالغ وكل هذا مما يزيد مايدفعه المشترى وينقص مايقبضه البائع ولكنا نعتبر تلك الاضافات محسوبة من الاصل مالم ينص عليها

٤٨١ ــ اذا استقامت الشركة فى أعمالها وتحسنت أحوالها وزاد صافى ايرادها فيزيد مايخص كل سهم أو كل ١٠٠ جنيه سندات وعلى أثر ذلك يزيد ثمن بيعها وشرائها

مثلا اذا كان مايخص السهم الواحد هو ١٠٪ فى السنة والاعمال جارية على محور الاستقامة والشركة خالية من السقوط والخسارة فثمن السهم الذى قيمته ١٠٠ جنيه ربما يزيد ٢٥ أو أكثر

واذا كانت الشركة تدفع شيأ قليلا أو لاتدفع شيأ عدّة سنين أو ظهر أنه ليس لها مستقبل حسن فيمكن شراء السهم ذى العشرة جنيهات بجنيهين أو أقل

فيلزمنا أن نعرف الفرق بين القيمة الاسمية للسهم (ثمنه عند تأسيس الشركة) وقيمته الحقيقية وهى المبلغ الذى يباع به بالبورصة

اذا كانت القيمة الحقيقية للسهم أكبر من قيمته الاسميـــة فالسهم يسمى مرتفع الثمن واذا كانت قيمته الحقيقية أقل من القيمة الاسمية فالسهم يسمى منحط الثمن واذا كانت القيـمة الحقيقية عين القيمة الاسمية فالسهم يسمى معتدلا

مثلا اذا بيع سهم قيمته الاسميـة ١٢ جنيها بمبلغ ١٥ جنيها يقـال انه بيع بزيادة ٢٥٪ والسهم مرتفع الثمن

واذا بيع سـند قيمته الاسمية ١٠٠ جنيه بمبلغ ١/٣ ٨٣ يقـال انه بيع بنقص ٢/٣ ١٦٪ والسهم منخفض الثمن

واذا بيع سهم قيمته الاسميـة ١٢ جنيها بمبلغ ١٢ جنيها يقـال انه معتدل الثمن

٤٨٢ – يوجد نوع آخر من السـندات ذو أهمية خصوصية ألا وهو سـندات دين الحكومة فهذه السـندات تبـاع وتشـترى فى الاسواق المالية مثل سندات الشركات ولنذكر على سبيل الاجمال أصل وضع هذه السندات

قد تقترض بعض الحكومات عنـد الحاجة مبالغ بأرباح سـنوية وتسديد هذه المبالغ واعطاء الارباح عليها يكون بعدة كيفيات منها مايأتى

(١) تسديد المبالغ وأرباحها بدفع سنوية

(٢) دفع الارباح وتأجيل دفع المبالغ لمدّة معينة

(٣) دفع الارباح السنوية وعدم اشـتراط مدّة معينة لدفع المبلغ وانمـا تستهلك السلفة بواسـطة شراء نفس السـندات من الاسواق المـالية بالتدريج عند سنوح الفرص

(٤) دفع الارباح وعدم دفع المبالغ مطلقا

(٥) دفع الارباح لحاملى السندات مدّة حياتهم فقط

وفى الاحوال ٣ و ٤ و ٥ تكون السلفة أهلية من (أهالى الحكومة) فى الحالة التى لاتردّ فيها المبالغ أو التى لايشترط فيها وقت معين لردّها فمشترى السندات انما يشترى فى الحقيقة المنفعة أى الفائدة السنوية التى هى نحو ½ ٢ ٪ أو ¾ ٢ ٪ أو ٣ ٪ أو ½ ٣ وكل نوع من هذه السندات له اسم مخصوص عند كل حكومة ولا حاجة لذكر هذه الاسماء فى هذا المختصر

٤٨٣ ــ يؤخذ مما تقدّم أنه يوجد أنواع كثيرة من سندات الشركات وسندات الحكومة وقد تميز الانواع بذكر ماتربحه المائة فى السنة أو مايربحه السهم فيقال مثلا سندات من ذات ٤ ٪ أى التى تربح ٤ ٪ فى السنة

اذا تقرر هذا فنذكر المسائل الحسابية المتعلقة بأحوال الاسهم والسندات فنقول

٤٨٤ ــ الحالة الاولى ــ ايجاد الايراد بعد معرفة القيمة الاسمية والسعر

مثال (١) مامقدار الايراد السنوى لمبلغ ١٦٢٥ جنيها سندات بسعر ٤ ٪

الحل ــ حيث ان ايراد ١٠٠ جنيه هو ٤

فيكون ايراد ١٦٢٥ جنيها هو $\frac{١٦٢٥ \times ٤}{١٠٠}$ = ٦٥ جنيها

مثال (٢) مامقدار ايراد ١٨٧٥ سهما بسعر ١٥ شلن السهم فى كل نصف سنة

الحل ـ الايراد المطلوب هو ٣٠ × ٨٧٥ = ٢٦٢٥٠ شلنا أى ١٣١٢ جنيها و ١٠ شلنات

تمـــرينـات

مامقدار الايراد السنوى المتحصل من

(٩٣٦) ٢٨٧٥ جنيها سندات بسعر ٤ ./٠

(٩٣٧) ٨٢٢٥ جنيها سندات بسعر ٥ر٢ ./٠

(٩٣٨) ٣٠٧٢ سهما بسعر ٥ شلنات

(٩٣٩) ٥٦٣٨ جنيها سندات بسعر ٥ ./٠

(٩٤٠) ٥٣٨٧ جنيها و ١٠ شلنات سندات بسعر ٣ ./٠

(٩٤١) ٢٥٠ سهما بسعر ١٢ شلن كل نصف سنة

٤٨٥ ـ الحالة الثانية ـ ايجاد مقدار القيمة الاسمية لسندات تشترى بمبلغ معلوم بعد معرفة سعر شرائها

مثال (١) مامقدار القيمة الاسمية للسـندات التى تشـترى بمبلغ ٣٧٣٥ جنيها بسعر $\frac{٣}{٨}$ ٩٣ بما فى ذلك السمسرة

الحل ـ حيث أن القيمة الاسمية للسـندات التى تشـترى بمبلغ $\frac{٣}{٨}$ ٩٣ هى ١٠٠ جنيه

فتكون القيمة الاسمية للسندات التى تشترى بمبلغ ٣٧٣٥ جنيها هى

$$\frac{٣٧٣٥ \times ١٠٠}{٩٣ \frac{٣}{٨}} = ٤٠٠٠ \text{ جنيه}$$

مثال (٢) كم سهما تشترى بمبلغ ١١٨٤ جنيها بسعر السهم ٤٫٥ جنيه والسمسرة $\frac{١}{٨}$ ٪.

الحل — ١١٨٤ : ٤ $\frac{٣}{٨}$ = ١١٨٤ : $\frac{٣٧}{٨}$ = $\frac{٩٤٧٢}{٣٧}$ = ٢٥٦ سهما

تمـــرينـات

مامقدار القيمة الاسمية للسندات التى تشترى بالمبالغ والاسعار الآتية

(٩٤٢) بمبلغ ٤٩٠٠ جنيه بسعر ٩٨

(٩٤٣) من ذات ٤ ٪ بمبلغ ١٤٠٧٦ جنيها بسعر ٩٧ $\frac{٣}{٤}$

(٩٤٤) من ذات ٣ ٪ بمبلغ ١٢٩٦٧ جنيه و ١٠ شلن بسعر ٩٠

(٩٤٥) بمبلغ ٢٣٩٤ جنيها بسعر ١٠٥

(٩٤٦) كم سهما نشترى بمبلغ ٧٧٦ جنيها بسعر السهم ١٢ جنيها والسمسرة ٢ شلن و ٦ بنس وما مقدار قيمتها الاسمية على حساب السهم ١٥ جنيها

٤٨٦ — الحالة الثالثة — ايجاد ثمن الشراء بعد معرفة القيمة الاسمية وسعر الشراء

مثال (١) مامقدار ثمن شراء ٧٥٠٠ جنيه سندات بسعر ٩٢ $\frac{١}{٨}$ والسمسرة $\frac{١}{٨}$ ٪.

الحل — نضم السمسرة على سعر الشراء أى ٩٢ $\frac{١}{٨}$ + $\frac{١}{٨}$ = ٩٢ $\frac{١}{٤}$

ثم يقال حيث ان ١٠٠ جنيه سندات تشرى بمبلغ ٩٢ $\frac{١}{٤}$

فيكون مبلغ ٧٥٠٠ جنيه سندات يشترى بمبلغ $\frac{٩٢ \frac{١}{٤} \times ٧٥٠٠}{١٠٠}$

= ٦٩١٨ جنيها و ٧٥٠ مليا

مثال (٢) ماثمن شراء ١٢ سهما من أسهم مياه الاسكندرية بسعر السهم $\frac{٧}{٨}$ ١١ مصريا

الحل ـ ١٢ × $\frac{٧}{٨}$ ١١ = ١٢ × $\frac{٩٥}{٨}$ = $\frac{٩٥ \times ٣}{٢}$ = ١٤٢ جنيها و ٥٠٠ مليم

تمـــرينـات

المطلوب حساب ثمن شراء السندات ذات القيم والاسعار الآتية

(٩٤٧) ١٥٠٠ جنيه سندات بسعر ٩٠

(٩٤٨) ١١٣٧ جنيها و ١٠ شلن سندات بسعر ٨٠

(٩٤٩) ٤٥٠٠ جنيه سندات بسعر $\frac{١}{٢}$ ١١٢

(٩٥٠) ١٥٥٣ جنيها و ٦ شلن و ٨٠ بنس بسعر $\frac{١}{٤}$ ٩٢ والسمسرة $\frac{١}{٨}$ ٪

(٩٥١) من التى تربح $\frac{١}{٢}$ ٤ ٪ وقيمتها الاسمية ١٢٨٧٥ جنيه بسعر $\frac{١}{٢}$ ١٠٨ والسمسرة $\frac{١}{٨}$ ٪

(٩٥٢) ٢٥ سهما من أسهم مياه القاهرة بسعر ١٠٥ فرنك

٤٨٧ ـ الحالة الرابعة ـ ايجاد الايراد من شراء سندات بمبلغ معين وسعر معلوم

مثال (١) مامقدار الإيراد المتحصل من شراء سندات ذات ٣ ٪ بمبلغ ٩٠٧٥ جنيها بسعر $\frac{٥}{٨}$ ٩٠ والسمسرة $\frac{١}{٨}$ ٪

الحل ـ نضم السمسرة على سعر الشراء أى $\frac{٥}{٨}$ ٩٠ + $\frac{١}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$ ٩٠ .

ثم يقال حيث ان ايراد ١٠٠ جنيه سندات هو ٣

ولكن ثمن ١٠٠ جنيه سندات هو $\frac{٣}{٤}$ ٩٠

فحينئذ يكون ايراد $٩٠\frac{٣}{٤}$ جنيه نقدية هو ٣

وايراد ١ « « « $\frac{٣}{٩٣\frac{٣}{٤}} = \frac{٤}{١٢١}$

« ٩٠٧٥ « « « $\frac{٤ \times ٩٠٧٥}{١٢١} =$ ٣٠٠ جنيه

مثال (٢) ما ايراد الاسهم التى شريت بمبلغ ٣٣٦٠ فرنك بسعر السهم ١٠٥ فرنك وايراده ٢,٢٥ فرنك فى كل ستة شهور

الحل ـ حيث ان ايراد السهم أى ١٠٥ فرنك هو ٤,٥ فى السنة

فيكون ايراد ٣٣٦٠ فرنك هو $\frac{٣٣٦٠ \times ٤,٥}{١٠٥} =$ ١٤٤ فرنك

تمـــرينـات

مامقدار الايراد المتحصل من شراء سندات بالمبالغ والاسعار الآتية

(٩٥٣) بمبلغ ٢٨٥٢ جنيه بسعر ١١٥ وتربح ٣٪

(٩٥٤) بمبلغ ١٢٧٤ بسعر ٩١ وتربح $\frac{١}{٢}$ ٣٪

(٩٥٥) بمبلغ ٧٥٦٠ جنيه من ذات ٣٪ بسعر $\frac{٣}{٨}$ ٩٤ والسمسرة $\frac{١}{٨}$ ٪

(٩٥٦) بمبلغ ٣٢٢٠ جنيه من ذات $\frac{١}{٢}$ ٣٪ بسعر $\frac{١}{٢}$ ٨٠

(٩٥٧) زيد اشترى سندات من ذات $\frac{١}{٤}$ ٣٪ بمبلغ ١٢١٠ جنيها بسعر $\frac{١}{٢}$ ٩٧ ثم اشترى بمبلغ مثله سندات من ذات ٥٪ بسعر $\frac{٣}{٤}$ ٩٠ فما مقدار ايراده

(٩٥٨) ماالايراد المتحصل من شراء أسهم بمبلغ ٨٢٢٠ جنيه بسعر ٦٨٥ فرنك وايراده $\frac{١}{٢}$ ٧ فرنك

٤٨٨ ـ الحالة الخامسة ـ ايجاد سـعر الشراء اذا علم الثمن وايراد المـائة من السندات

مثال (١) ماسعر السندات التى تربح ٣٪ ومعلوم أنها شريت بمبلغ ٨٦٩ جنيها و ٢٥٠ مليا وبلغ ايرادها ٢٨ جنيها و ٥٠٠ مليم

الحل ـ يلاحظ أن ٣ هو ربح ١٠٠ جنيه سندات أو ربح الثمن الحقيقى لسند ذى ١٠٠ جنيه

ثم يقال حيث ان ٢٨ جنيها و ٥٠٠ مليم هو ايراد ٨٦٩ جنيها و ٢٥٠ مليا فيكون

٣ جنيه هو ايراد مبلغ $\frac{٣ \times ٨٦٩,٢٥}{٢٨,٥} = ٩١ \frac{١}{٢}$

مثال (٢) أسهم شريت بمبلغ ١٧٨٥ فرنك وبلغ ايرادها ٧٦,٥ فرنك وكان ايراد السهم ٤,٥ فرنك فما ثمن شرائه

الحل ـ حيث ان مبلغ ٧٦,٥ فرنك ايراد لمبلغ ١٧٨٥ فرنك

فيكون مبلغ ٤,٥ فرنك ايراد لمبلغ $\frac{٤,٥ \times ١٧٨٥}{٧٦,٥} = ١٠٥$

فيكون ثمن شراء السهم ١٠٥ فرنك

تمـــرينـات

(٩٥٩) ايراد مقداره ١٢٦ جنيه متحصـل من شراء سندات تربح ٣٪ بمبلغ ٣٥٩١ فما سعرها

(٩٦٠) ايراد مقداره ٢٧٦ جنيه متحصل من شراء سندات تربح ٣٪ بمبلغ ٨٥٦٧,٥ فما سعرها مع العلم بأن السمسرة كانت $\frac{١}{٨}$٪

(٩٦١) ماسعر السندات التى تربح ٤ ٪ اذا كان بوضع ٨٧١٥ جنيه يتحصل على ايراد قدره ٨٣٠ جنيه

(٩٦٢) اذا وضع مبلغ ٢٣٤٦ جنيه فى شراء سندات تربح $\frac{1}{2}$ ٣ ٪ وحصل منها ايراد قدره ٨٤ جنيه فما سعرها والسمسرة $\frac{1}{8}$ ٪

(٩٦٣) اذا اشترى بمبلغ ١٥٦٠ جنيه من سندات ذات ٤ ٪ وكان ايرادها ٦٠ جنيها فما سعر الشراء

(٩٦٤) شريت أسهم بمبلغ ٤٨٠ جنيه وحصل منها ايراد قدره ٩٥٦ قرش بعد دفع مبلغ ٤ قروش مصاريف التحويل وكان ايراد السهم ٨ قروش فما ثمن شراء السهم وكم عدد الاسهم

مسائل متنوعة محلولة على الاسهم والسندات

٤٨٩ ــ المسألة الاولى ــ هل الارجح ايرادا شراء سندات ذات $\frac{1}{2}$ ٥ ٪ بسعر ١٠٥ جنيه أو شراء سندات ذات $\frac{1}{2}$ ٤ ٪ بسعر ٨٧,٥

الحل ــ نبحث عن الربح المقابل الى ١٠٠ جنيه نقدا فى الحالتين ولذلك يقال

أولا ــ حيث ان ١٠٥ جنيه تعطى ايرادا قدره $\frac{1}{2}$ ٥

فيكون ١٠٠ جنيه تعطى ايرادا قدره $\frac{١٠٠ \times ٥\frac{1}{2}}{١٠٥} = ٥\frac{٥}{٢١}$

ثانيا ــ حيث ان $\frac{1}{2}$ ٨٧ جنيها تعطى ايرادا قدره $\frac{1}{2}$ ٤

فيكون ١٠٠ جنيه تعطى ايرادا قدره $\frac{١٠٠ \times ٤\frac{1}{2}}{٨٧\frac{1}{2}} = ٥\frac{1}{٧}$

فيكون الاول أرجح ايرادا

٤٩٠ ــ المسألة الثانية ــ ماذا يحدث من التغير فى الايراد اذا بيعت ســـندات قيمتها ٦٤٠٠ جنيــه تربح ٣ ٪ بســـعر $\frac{٣}{٨}$ ٨٦ ثم اشترى بثمنها سندات ذات ٤ ٪ بسعر $\frac{٧}{٨}$ ١١٤ وكانت السمسرة ٢ شلن و ٦ بنس ٪ .

الحل ــ الايراد المتحصل من سندات ذات ٣ ٪ وقيمتها الاسمية ٦٤٠٠ هو $\frac{٣ \times ٦٤٠٠}{١٠٠}$ = ١٩٢ جنيه

والمبلغ الذى يتحصل من بيع سندات قيمتها ٦٤٠٠ جنيه بسعر $\frac{١}{٤}$ ٨٦ هو $\frac{٨٦\frac{١}{٤} \times ٦٤٠٠}{١٠٠}$ = ٥٥٢٠ جنيها

وقيمة السندات ذات ٤ ٪ التى تشترى بمبلغ ٥٥٢٠ جنيه بسعر ١١٥ هى $\frac{٥٥٢٠ \times ١٠٠}{١١٥}$ = ٤٨٠٠ جنيه سندات

والايراد المتحصــل من ســندات ٤ ٪ قيمتها الاسمية ٤٨٠٠ هو $\frac{٤ \times ٤٨٠٠}{١٠٠}$ = ١٩٢ جنيه

وحينئذ فلا يحصل تغير فى الايراد

٤٩١ ــ المسألة الثالثة ــ ماســعر الربح المتحصــل من شراء سندات ذات ٤ ٪ بسعر $\frac{١}{٢}$ ٩٢

الحل ــ حيث ان الدخل المتحصل من $\frac{١}{٢}$ ٩٢ جنيها هو ٤

فيكون الدخل المتحصل من ١٠٠ جنيه هو $\frac{٤ \times ١٠٠}{٩٢\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١٢}{٣٧}$ ٤

٤٩٢ ـ المسألة الرابعة ـ سندات ذات ٤ ٪ تعطى ايرادا قدره $\frac{١٢}{٣٧}$ ٤ من ثمنها فما سعر شراء هذه السندات

الحل ـ مبلغ $\frac{١٢}{٣٧}$ ٤ جنيه هو ربح ١٠٠ جنيه تدفع نقدا

فيكون مبلغ ٤ « هو ربح $\frac{١٠٠ \times ٤}{٤ \frac{١٢}{٣٧}}$ تدفع نقدا أو

٤ « « $\frac{٣٧ \times ٤٠٠}{١٦٠} = \frac{١٨٥}{٢} = ٩٢ \frac{١}{٢}$

وهو السعر المطلوب

مسائل عمومية على الاسهم والسندات

(٩٦٥) ماقيمة السندات ذات $\frac{١}{٢}$ ٣ ٪ التي يمكن شراؤها بمبلغ ٣٥١٩ جنيه بسعر $\frac{٣}{٤}$ ٩٧

(٩٦٦) ما هو الايراد السنوى المتحصل من شراء سندات ذات $\frac{١}{٢}$ ٣ ٪ بمبلغ ١٣٠٠٠ جنيه بسعر ٩١ وما ايراد هذا المبلغ من سندات ذات ٤ ٪ بسعر ٩٦

(٩٦٧) ماايراد مبلغ ٥٠٠٠ جنيه اذا وضع منه ٢٠٠٠ جنيه فى شراء سندات ذات ٣ ٪ بسعر ٩٨ والباقى فى شراء سندات ذات $\frac{١}{٢}$ ٣ ٪ معتدلة (سعرها ١٠٠ جنيه)

(٩٦٨) بوضع مبلغ ٣٦٠٠ جنيه فى شراء سندات ٣ ٪ يتحصل على أرباح سعرها $\frac{١}{٦}$ ٤ ٪ بالنسبة لثمن الشراء فما سعر هذه السندات

(٩٦٩) سندات ذات ٣ ٪ سعرها ٨٥ جنيها فما سعر الربح فى المائة للمشترى

(٩٧٠) أيهما أرجح ايرادا سندات بنك يدفع عليها ١٠ ٪ وسعرها $\frac{١}{٢}$ ٢٣٤ أو سندات ذات ٣ ٪ وسعرها $\frac{١}{٢}$ ٩٢

(٩٧١) ماهو المبلغ الذى يلزم أن يشترى به سندات ذات $٣\frac{١}{٢}$ ٪ بسعر ٩٦ للحصول على ايراد سنوى قدره ٧١١ جنيه و ٤ شلن و $٨\frac{٣}{٤}$ بنس وما سعر الربح لهذا المبلغ

(٩٧٢) اذا وضع مبلغ ٢٢٤٥ جنيه فى شراء سندات ذات ٤ ٪ بسعر ٨٤ فما هو المبلغ اللازم لشراء سندات ذات $٣\frac{١}{٢}$ ٪ بسعر ٩٨ للحصول على الايراد عينه

(٩٧٣) ماهو الدخل كل نصف سنة المتحصل من وضع مبلغ ٣٠٠٠ جنيه فى شراء سندات ذات $٣\frac{١}{٢}$ ٪ بسعر $٩٨\frac{٣}{٤}$ بعد استبعاد ضريبة ٣ بنس عن كل جنيه

(٩٧٤) اذا كان سعر سندات سكة حديدية هو ٢٨ ٪ زيادة عن قيمتها الاسمية وتدفع أرباحا وجد أنها تعادل $٧\frac{١}{٢}$ ٪ من ثمن الشراء فما سعر الربح للمشــترى اذا اشتريت بنقص ١٠ ٪ من قيمتها الاسمية

(٩٧٥) اذا باع شخص ١٠٠٠ جنيه سندات من ذات ٣ ٪ بسعر ٩١ ووضع المتحصل فى بنك بسعر ٥ ٪ فما التغيير فى ايراده

(٩٧٦) ماذا يحدث من التغيير فى الايراد من استبدال ٤٢٧٥ جنيه سندات ذات ٤ ٪ بسعر ٨٠ بسندات ذات $٥\frac{١}{٢}$ ٪ بسعر ٩٩

(٩٧٧) ســندات ذات ٣ ٪ سعرها ٩٢ وســندات ذات ٤ ٪ ســعرها ١١٥ فماذا يحصل من التغير فى ايراد شخص باع ١٠٠٠ جنيه من ذات ٣ ٪ واشترى بثمنها سندات ذات ٤ ٪

(٩٧٨) ماذا يحصــل من التغيير فى ايراد شخص باع ٣٢٠٠ جنيه ســـندات ذات ٣ ٪ بسعر $٨١\frac{٣}{٨}$ واشترى بالقيمة سندات ذات ٤ ٪ بسعر $١١٤\frac{٧}{٨}$ وكانت السمسرة $\frac{١}{٨}$ ٪ فى كلتا الحالتين

(٩٧٩) اشــترى شخص بمبلغ ٧٥٦٠ جنيه سندات ذات ٣ ٪ بسعر $٩٤\frac{١}{٢}$ ولما سقط السعر الى ٩٠ باع ربع ما كان عنده من هذه الســندات ولما ارتفعت الى $٩٤\frac{٣}{٤}$ باع الباقى فما الذى طرأ على رأس ماله

الدفع السنوى ـ الاستهلاك

٤٩٣ ـ تمهيد ـ اذا اقترض شخص مبلغا بالارباح المركبة وأراد تسديد هذا المبلغ وأرباحه فى زمن معين بأقساط متساوية تدفع آخر كل سنة فكل قسط منها يسمى دفعة سنوية

وتحديد مقدار الدفعة مهم جدا اذ المقصود أنه اذا حسب ربح المبلغ فى أول سنة وأضيف الربح الى المبلغ ثم طرح من المجموع مقدار الدفعة الاولى ثم ربّح الباقى فى السنة الثانية وضم الربح الى هذا الباقى وطرح من المجموع مقدار الدفعة الثانية (الذى يكون مساويا مقدار الاولى) ثم ربّح الباقى كذلك فى السنة الثالثة وضم الربح الى هذا الباقى وطرحت الدفعة الثالثة وهكذا فى السنين جميعها كانت الدفعة الاخيرة مساوية لمقدار الباقى الاخير وأرباحه فى السنة الاخيرة وبذلك يكون قد استهلك المبلغ المقترض وأرباحه وتكون كل دفعة عبارة عن جزء من المبلغ المقترض وأرباح السنة ومما ذكر يؤخذ التعريف الآتى

٤٩٤ ـ الدفعة السنوية هى مبلغ ثابت يدفع آخر كل سنة لاستهلاك مبلغ مقترض وأرباحه فى زمن معين

٤٩٥ ـ مسائل الدفع السنوى تتعلق بأربع كميات وهى الدفعة السنوية والمبلغ المقترض والزمن والسعر فاذا علم ثلاث كميات منها أمكن ايجاد مقدار الكمية الرابعة وسنأتى بها على هذا الترتيب فنقول

٤٩٦ ـ أولا ـ حساب الدفعة السنوية بعد معرفة المبلغ المقترض والزمن والسعر

لناخذ مسئلة عامة فنفرض أن شخصا اقترض مبلغا يرمز له بحرف م بسعر قدره ب للوحدة و يريد أن يسدّده بدفع سنوية متســاوية يرمز للواحدة منها بحرف د فيقال اذا فرض ان هذا الشخص لم يسدّد شيأ من المبلغ فيكون ملزما بجملة هذا المبلغ وأرباحه فى تلك المدّة فاذا رمز للجملة بحرف ج يكون

$$\text{ج} = \text{م}\,(١ + \text{ب})^{\text{ن}}$$

ولكن حيث انه يســدّد دفعا متساوية مقــدار كل واحدة منها د فكما أن الدائن يطالب المدين بجملة المبلغ وأرباحه كذلك المدين يحاسب الدائن على مقدار الدفع الســنوية وأرباحها وحيث ان الدفعة الاولى تمكث عنــد الدائن بقدر عدد السنين ناقصا واحدا والدفعــة الثانيــة تمكث عنــده بقدر عدد السنين الا اثنتين وهكذا فاذا رمز لجمل هذه الدفع بالرموز $\text{ج}_{١}$ و $\text{ج}_{٢}$ و $\text{ج}_{٣}$ و .... $\overrightarrow{\text{ج}_{\text{ن}-١}}$ و $\text{ج}_{\text{ن}}$ يكون

$$\text{ج}_{١} = \text{د}\,(١ + \text{ب})^{\text{ن}-١} \quad \text{و}$$

$$\text{ج}_{٢} = \text{د}\,(١ + \text{ب})^{\text{ن}-٢} \quad \text{و}$$

$$\text{ج}_{٣} = \text{د}\,(١ + \text{ب})^{\text{ن}-٣} \quad \text{و}$$

....

....

$$\overrightarrow{\text{ج}_{\text{ن}-١}} = \text{د}\,(١ + \text{ب}) \quad \text{و}$$

$$\text{ج}_{\text{ن}} = \text{د}$$

وهذه الدفع يمكن اعتبارها حدود متوالية هندسية تصاعدية حدّها الاول د وحدّها الاخير $\text{د}\,(1+\text{ب})^{\text{ن}-1}$ وأساسها $(1+\text{ب})$ فيكون مجموع هذه الحدود هو

$$\frac{\text{د}\,(1+\text{ب})^{\text{ن}-1}(1+\text{ب})-\text{د}}{\text{ب}}$$ وبالاختصار يكون

$$\frac{\text{د}\,(1+\text{ب})^{\text{ن}}-\text{د}}{\text{ب}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{د}\,[(1+\text{ب})^{\text{ن}}-1]}{\text{ب}}$$

وحيث انه يجب أن يكون هـذا المقدار الذى هو عبارة عن مجموع الدفع وأرباحها مساويا لجملة المبلغ وأرباحه أى للمقدار $\text{م}\,(1+\text{ب})^{\text{ن}}$ فيكون

$$\text{م}\,(1+\text{ب})^{\text{ن}}=\frac{\text{د}\,[(1+\text{ب})^{\text{ن}}-1]}{\text{ب}}$$ وبضرب طرفى هذه المتساوية فى ب يحدث

$$\text{ب}\,\text{م}\,(1+\text{ب})^{\text{ن}}=\text{د}\,[(1+\text{ب})^{\text{ن}}-1]$$ وبقسمة الطرفين على $(1+\text{ب})^{\text{ن}}-1$ يحدث

$$\text{د}=\frac{\text{ب}\,\text{م}\,(1+\text{ب})^{\text{ن}}}{(1+\text{ب})^{\text{ن}}-1} \qquad (1)$$

وهذا هو القانون المطلوب ولنطبقه على حل المسألة الآتية

مسألة ــ شخص اقترض مبلغ ١٠٠٠ جنيه بسعر ٥٪ بالربح المركب ويريد أن يسدّد هذا المبلغ وربحه فى ٨ سنين فما مقدار مايدفعه فى كل سنة

لذلك نضع فى قانون (١) السابق بدل الحروف مقاديرها فيحدث

$$\text{د} = \frac{\text{٠,٠٥} \times \text{١٠٠٠} \times \text{١,٠٥}^{\text{أ}}}{\text{١,٠٥}^{\text{أ}} - \text{١}}$$

ثم نبحث عن مقدار $\text{١,٠٥}^{\text{أ}}$ بواســطة اللوغاريتم فنجد أنه يساوى ١,٤٧٧٤٨٣ ونضع هذا المقدار بدلا عن $\text{١,٠٥}^{\text{أ}}$ فينتج

$$\text{د} = \frac{\text{٠,٠٥} \times \text{١٠٠٠} \times \text{١,٤٧٧٤٨٣}}{\text{١,٤٧٧٥١٧} - \text{١}} = \text{١٥٤,٧١٦} \text{ جنيها}$$

أعنى أن مقدار الدفعة هو ١٥٤ جنيها و ٧١٦ مليما

٤٩٧ ــ تنبيه ــ اذا أريد أن تكون الاقساط كل ستة شهور مرة فيستعمل القــانون (١) السابق غير أنه يوضع فيــه نصف ربح الوحدة بدلا عن ربحها وضعف عدد السنين بدلا عنها

٤٩٨ ــ ثانيــا ــ حساب المبلغ بعــد معرفة الدفعة السنوية والزمن والسعر

قد تقدّم فى (٤٩٦) أن قانون الدفعة السنوية هو

$$\text{ن} = \frac{\text{ب م} (\text{١} + \text{ب})^{\text{ن}}}{(\text{١} + \text{ب})^{\text{ن}} - \text{١}}$$ فمنه يكون

$\text{ب م} (\text{١} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{د} \left[(\text{١} + \text{ب})^{\text{ن}} - \text{١} \right]$ وبقسمة الطرفين على $\text{ب} (\text{١} + \text{ب})^{\text{ن}}$ يحدث

$$\text{م} = \frac{\text{د} \left[(\text{١} + \text{ب})^{\text{ن}} - \text{١} \right]}{\text{ب} (\text{١} + \text{ب})^{\text{ن}}} \qquad (\text{٢})$$

وهذا القانون يحسب بواسطته المبلغ المقترض بعــد معرفة الدفعــة والزمن والسعر ولنطبقه على حل المسألة الآتية

مامقدار المبلغ المقترض بسعر ٤,٥ ٪ ويمكن استهلاكه فى مدة ١٥ سنة بدفع سنوية مقدار الواحدة ١١١٧ جنيها و٢١٨ مليا

الحل ــ نضع فى قانون (٢) بدل الحروف مقاديرها فينتج

$$\text{م} = \frac{1117{,}218 \times (1{,}045^{15} - 1)}{0{,}045 \times 1{,}045^{15}}$$

ثم نبحث عن مقدار $1{,}045^{15}$ بواسطة اللوغاريتم فنجد أنه يساوى ١,٩٣٥٥٢١٧ ثم نضع هذا المقدار بدلا عن $1{,}045^{15}$ فينتج

$\text{م} = \frac{1117{,}218 \times 0{,}9355217}{0{,}045 \times 1{,}9355217}$ وبعمل الحساب نجد أن

م = ١١٩٩٩,٩٩٩ = ١٢٠٠٠ جنيه تقريبا

٤٩٩ ــ ثالثا ــ حساب الزمن بعد معرفة المبلغ المقترض والسعر والدفعة السنوية

يمكن ايجاد مقدار الزمن من قانون الدفعة السنوية السابق وهو

$\text{د} = \frac{\text{م ب} (1+\text{ب})^{\text{ن}}}{(1+\text{ب})^{\text{ن}} - 1}$ فمنه يكون

$\text{د} (1+\text{ب})^{\text{ن}} - \text{د} = \text{م ب} (1+\text{ب})^{\text{ن}}$ وباضافة د لطرفى هذه المتساوية ثم طرح $\text{م ب} (1+\text{ب})^{\text{ن}}$ منهما يحدث

$$\text{د} (1+\text{ب})^{\text{ن}} - \text{م ب} (1+\text{ب})^{\text{ن}} = \text{د}$$

وباخذ $(1+\text{ب})^{\text{ن}}$ مضروبا مشتركا يحدث

$(١ + ب)^{ن} (ى - م ب) = ى$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين ينتج

∴ لو$(١ + ب)$ + لو$(ى - م ب)$ = لو ى وبطرح لو$(ى - م ب)$ من الطرفين يحدث

∴ لو$(١ + ب)$ = لو ى - لو$(ى - م ب)$ وبقسمة الطرفين على لو$(١ + ب)$ ينتج

$$ن = \frac{لو ى - لو(ى - م ب)}{لو(١ + ب)} \qquad (٣)$$

وهـــذا القانون يحسب بواسطته مقــــدار الزمن ولنطبقه على حل المسألة الآتية

مسألة ـ شخص اقترض مبلغ ٥٠٠٠ جنيه بربح مركب بسعر ٦٪ وسدد هذا المبلغ وأرباحه بدفع متساوية مقدار الواحدة منها ٧٣٥,٠٢٥ فما مقدار الزمن

الحل ـ نضع فى قانون (٣) السابق بدل الحروف مقاديرها فينتج

$$ن = \frac{لو ٧٣٥,٠٢٥ - لو(٧٣٥,٠٢٥ \times ٥٠٠٠ \times ٠,٠٦)}{لو ١,٠٦}$$ أو

$$ن = \frac{لو ٧٣٥,٠٢٥ - لو ٤٣٥,٠٢٥}{لو ١,٠٦}$$

ثم نبحث عن لو ٧٣٥,٠٢٥ فنجده ٢,٨٦٦٣١ وعن لو ٤٣٥,٠٢٥ فنجده ٢,٦٣٨٥٢ ونقسم باقى طـرح هـــذين اللوغاريتمين وهو ٠,٢٢٧٧٩ على لو ١,٠٦ وهو ٠,٠٢٥٣١ فينتج ٩ ســنين أعنى ان مبلغ ٥٠٠٠ جنيه سدد فى ٩ سنين بالشروط المفروضة

٥٠٠ ـ تنبيــه ـ لاجل أن تكون المسألة ممكنة الحل يجب أن يكون ى - م ب موجبا لانه لو كان سـالبا فلا يمكن استخراج لوغاريتمه ويظهر عدم امكان الحل بالتأمل فى منطوق المسألة فان

م ب يدل على ربح المبلغ المقترض فى سنة و ى يدل على مقدار الدفعة فاذا كانت الدفعة السنوية أقل من ربح المبلغ فى سنة كان التخلص من المبلغ المقترض مستحيلا

١٠٥ ــ رابعا ــ حساب السعر مع معرفة المبلغ المقترض والدفعة السنوية والزمن

لحساب السعر يقال انه يؤخذ من قانون الدفعة السنوية وهو

$$\text{ى} = \frac{\text{م ب}\,(\text{١}+\text{ب})^{\text{ن}}}{(\text{١}+\text{ب})^{\text{ن}}-\text{١}} \quad \text{أن}$$

$\text{ى}\,(\text{١}+\text{ب})^{\text{ن}} - \text{ى} = \text{م ب}\,(\text{١}+\text{ب})^{\text{ن}}$ وباضافة ى الى الطرفين وطرح $\text{م ب}\,(\text{١}+\text{ب})^{\text{ن}}$ منهما ينتج

$\text{ى}\,(\text{١}+\text{ب})^{\text{ن}} - \text{م ب}\,(\text{١}+\text{ب})^{\text{ن}} = \text{ى}$ وبأخذ $(\text{١}+\text{ب})^{\text{ن}}$ مضروبا مشتركا يحدث

$(\text{١}+\text{ب})^{\text{ن}}\,(\text{ى}-\text{م ب}) = \text{ى}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين يحدث

$\text{ن لو}(\text{١}+\text{ب}) + \text{لو}(\text{ى}-\text{م}) = \text{لو ى}$ وبطرح $\text{لو}(\text{ى}-\text{م ب})$ من الطرفين يحدث

$\text{ن لو}(\text{١}+\text{ب}) = \text{لو ى} - \text{لو}(\text{ى}-\text{م ب})$ وبعكس الطرفين يحدث

$$\text{لو ى} - \text{لو}(\text{ى}-\text{م ب}) = \text{ن لو}(\text{١}+\text{ب}) \qquad (\text{٤})$$

وبواسطة هـــذا القانون يمكن ايجاد مقدار السعر بالكيفية التى سنشرحها فى المسألة الاتية

بأى ســعر اقترض مبلغ ٦٠٠ جنيه وتسدّد فى أربع ســنين بدفع سنوية قدر الواحدة منها ١٩١,١٧١ جنيه

الحل – نضع فى قانون (٤) السابق بدل الحروف مقاديرها فيحدث

لو ١٩١,١٧١ – لو (١٩١,١٧١ – ٦٠٠ ب) = ٤ لو (١ + ب)

ثم نفرض أن ب يساوى ٠٦,٠ فنجد أن مقدار الطرف الاوّل من هذه المتساوية وهو

لو ١٩١,١٧١ – لو (١٩١,١٧١ – ٦٠٠ × ٠٦,٠) = ٠,١٠٢٥٣

ومقدار الطرف الثانى وهو ٤ لو ١,٠٦ = ٠,١٠١٢٤ ويرى أن الطرف الاوّل أكبر من الثانى بمقـدار ٠,٠٠١٢٩ ومن المعـلوم أنه كلما نقص مقـدار ب ينقص الطرف الاوّل تبعا له فاذا جعـل ب يساوى ٠٥,٠ نجد أن مقدار الطرف الاوّل من المتساوية السابقة وهو

لو ١٩١,١٧١ – لو (١٩١,١٧١) – ٦٠٠ × ٠٥,٠) = ٠,٠٨٣٦٨

ومقدار الطرف الثانى وهو ٤ لو ١,٠٥ = ٠,٠٨٤٧٦ ويرى فى هذه الحالة أن مقدار الطرف الثانى صـار أكبر من الطرف الاوّل بمقـدار ٠,٠٠١٠٨

ومن هنا يعلم أن مقـدار ب محصور بين ٠٦,٠ و ٠٥,٠ فاذا فرض أنه يساوى ٠٥٥,٠ نجد أن مقدار الطرف الاوّل من المتساوية السابقة وهو

لو ١٩١,١٧١ – لو (١٩١,١٧١ – ٦٠٠ × ٠٥٥,٠) = ٠,٠٩٣٠١

ومقدار الطرف الثانى وهو ٤ لو ١,٠٥٥ = ٠,٠٩٣٠٠

وحيث ان الطرف الاوّل أكبر من الثانى بمقدار ٠٫٠٠٠٠١ وهذا الفرق قليل جدًا فيكون مقدار ب هو ٠٫٠٥٥ وبناء على ذلك يكون السعر المطلوب هو ٥٫٥ ٪

مسائل على الدفع السنوى

(٩٨٠) شركة تجارية اشترت ٦٠٠٠ فدان ثمن الفدان منها ٣٠ جنيها مصريا وقامت بدفع ثلث الثمن وتعهدت بتسديد الباقى على ٨ سنين وأن تحسب أرباحه المركبة بسعر ٤٫٥ ٪ فما مقدار ما يلزم أن تدفعه الشركة كل سنة

(٩٨١) ما مقدار المبلغ المقترض بسعر ٤٫٥ ٪ وسدد فى ١٦ سنة بدفع سنوية قدر الواحدة منها ١٧٧٩٫٩ قرشا

(٩٨٢) مزارع أراد أن يشترى ٣٦ فدانا بسعر الفدان ٧٥ جنيها ولكنه لا يملك غير ٩٠٠ جنيه ففى كم سنة يسدد باقى الثمن وأرباحه المركبة بسعر ٥ ٪ اذا كان يدفع قيمة مايؤجر به هذه الاطيان على حساب الفدان ٥ جنيهات فى السنة وأن يضم الى ذلك ٣٣٫١٠٠ جنيها فى كل سنة

(٩٨٣) بأى سعر اقترض مبلغ ٢٠٠٠٠ فرنك وتسدد فى ٩ سنوات بدفع سنوية قدر الواحدة منها ٢٩٤٠٫٦٩ فرنكا

(٩٨٤) ما مقدار الدفعة السنوية التى يمكن أن يستهلك بواسطتها ٣٠٠٠٠ قرش مقترضا ٥ ٪ فى مدة ١٠ سنين

(٩٨٥) ماعدد الدفع السنوية التى يستهلك بها ١٥٠٠٠ فرنك مقترضا بسعر ٦ ٪ اذا دفع فى كل سنة ٢٠٣٧٫٨٠ فرنكا

(٩٨٦) بأى سعر اقترض مبلغ ٣٠٠٠ جنيه حتى انه تسدد بخمس دفع سنوية مقدار الواحدة منها ٦٩٢ جنيه و ٩٠٠ مليم

(٩٨٧) شخص يريد أن يبيع منزله بثمن معين ولكن يقبل أن يأخذ نصف الثمن مقدما ويؤجل الباقى على ثلاث سنوات بحيث تحسب له الارباح المركبة بسعر ٥ ٪ وعلى ذلك تكون الدفعة التى يأخذها كل سنة ١٢٥٠٫٥ جنيها فما مقدار الثمن الذى يريد أن يبيع به فى الحال

الوضـــع الســـنوى

٥٠٢ ـ الغرض من قاعدة الوضع السنوى هو معرفة مايستحقه شخص استمر على وضع مبلغ ثابت فى كل ســنة مدّة معينة ليربح ربحا مركبا بسعر معلوم

٥٠٣ ـ السعر هو ربح المـائة فى الســنة والزمن هو المدّة التى تستمر فيها المبالغ فى التشغيل وليلاحظ أن آخر دفعة لابدّ أن تمكث زمنا ليحسب لها ربح

٥٠٤ ـ مسائل هـذه القاعدة تشتمل على مقدار المبلغ الذى يوضع كل سنة والزمن والسعر والجملة ومتى علم ثلاثة من هذه المقادير أمكن ايجاد الرابع وسنأتى بها مفصلة فنقول

٥٠٥ ـ أوّلا ـ حساب الجملة بعـد معرفة المبلغ والزمن والسعر لنأخذ مسألة عمومية فنفرض أن شخصا يضع فى كل سنة مبلغا نرمز له بحرف م وأنه استمر على ذلك مدّة ســنين عددها ن بسعر نرمز لربح الوحدة منه بحرف ب وأنه يطلب معرفة مقدار مايستحقه عقب هذه المدّة ثم يقال

المبلغ الاول يمكث سنين عددها ن فيؤول الى $\text{م}(\text{١}+\text{ب})^{\text{ن}}$

« الثـانى « « « ن ـ ١ « $\text{م}(\text{١}+\text{ب})^{\text{ن}-\text{١}}$

« الثالث « « « ن ـ ٢ « $\text{م}(\text{١}+\text{ب})^{\text{ن}-\text{٢}}$

... ...

... ...

والمبلغ الذى قبل الاخير يمكث سنتين فيؤول الى $\text{م}(\text{١}+\text{ب})^{\text{٢}}$

والمبلغ الاخـــير يمكث ســـنة فيؤول الى $\text{م}(\text{١}+\text{ب})$

وحيث ان هذا الشخص يستحق مجموع ماآلت اليـه المبالغ التى وضعها و بالتأمل يرى أن ما آلت اليـه هـذه المبالغ عبارة عن حدود متواليـة هندسـية تصاعدية حدّهـا الاول $\text{م}(1+\text{ب})$ والاخير $\text{م}(1+\text{ب})^{\text{ن}}$ وأساسها $(1+\text{ب})$ فحينئذ يكون مجموع حدودهـا الذى هو جملة مايستحقه هذا الشخص هو

$$\text{ح} = \frac{\text{م}(1+\text{ب})^{\text{ن}}(1+\text{ب}) - \text{م}(1+\text{ب})}{\text{ب}} \quad \text{أو}$$

$$\text{ح} = \frac{\text{م}(1+\text{ب})\left[(1+\text{ب})^{\text{ن}} - 1\right]}{\text{ب}} \qquad (1)$$

وهذا القانون العام يمكن أن يحسب بواسطته جملة ماتؤول اليه مبالغ موضوعة لمدّة معينة بسعر معلوم ولنطبقه على حل المسألة الآتية

مسألة ــ شخص يضع فى كل سنة ١٢٠ جنيها مصريا لتربح ربحا مركبا بسعر ٤٪ واستمر على ذلك مدّة ١٠ سنين فما مقدار مايأخذه عقب هذه المدّة

الحل ــ نضع فى قانون (١) السابق بدل الحروف مقاديرها فيحدث

$$\text{ح} = \frac{120 \times 1{,}04 \times (1{,}04^{10} - 1)}{0{,}04}$$

ثم نبحث عن مقدار $1{,}04^{10}$ بواسطة اللوغاريتم فنجد أنه يساوى ١,٤٨٠١٣ وحينئذ يكون $1{,}04^{10} - 1 = 0{,}48013$ فنضعه بدلا عنه فى المتساوية المذكورة فيحدث

$$\text{ح} = \frac{120 \times 1{,}04 \times 0{,}48013}{0{,}04} \quad \text{او}$$

$$\text{ح} = 1498{,}006 \ \text{جنيها مصريا}$$

٥٠٦ ــ ثانيا ــ حساب المبلغ مع معرفة الجملة والزمن والسعر لحساب المبلغ ناخذ قانون (١) السابق بنمرة ٥٠٥ الذى هو

$$\text{ح} = \frac{\text{م}(١+\text{ب})\left[(١+\text{ب})^{\text{ن}}-١\right]}{\text{ب}}$$

ونضرب الطرفين فى ب فيحدث $\text{ح ب} = \text{م}(١+\text{ب})\left[(١+\text{ب})^{\text{ن}}-١\right]$

ثم نقسم الطرفين على مكرر م فيحدث

$$\text{م} = \frac{\text{ح ب}}{(١+\text{ب})\left[(١+\text{ب})^{\text{ن}}-١\right]} \quad \text{أو}$$

$$\text{م} = \frac{\text{ح ب}}{(١+\text{ب})^{\text{ن}+١}-(١+\text{ب})} \qquad (٢)$$

وبواسطة هذا القانون يحسب المبلغ الذى يوضع سـنويا ولنطبقه على حل المسألة الآتية

مسألة ــ شخص استمر على وضع مبلغ ثابت فى كل سـنة ليربح ربحا مركبا بسعر ٣,٥٪ وبعـد ٨ سـنين اسـتلم مبلغ ٩٣٦ جنيها و٧٨٧ مليا فما مقدار المبلغ الذى كان يضعه كل سنة

الحل ــ نضع فى قانون (٢) السابق بدل الحروف مقاديرها فيحدث

$$\text{م} = \frac{٠,٠٣٥ \times ٩٣٦,٧٨٧}{١,٠٣٥^{٩}-١,٠٣٥}$$

ثم نبحث عن مقدار $١,٠٣٥^{٩}$ بواسطة اللوغاريتم فنجد أنه يساوى ١,٣٦٢٨٧٥ ونضعه بدلا عنه فى المتساوية المذكورة فيحدث

$\text{م} = \frac{٠,٠٣٥ \times ٩٣٦,٧٨٧}{١,٣٦٢٨٧٥-١,٠٣٥}$ وباجراء العمليات المبينة فى البســط والمقام يحدث م = ١٠٠ جنيه

٥٠٧ ـ ثالثا ـ حساب الزمن بعد معرفة الجملة والمبلغ والسعر

لحساب الزمن نأخذ قانون (١) السابق بنمرة ٥٠٥ وهو

$\text{ح} = \frac{\text{م}(١+\text{ب})[(١+\text{ب})^{\text{ن}} - ١]}{\text{ب}}$ ونضرب طرفيه فى ب

فيحدث $\text{ح ب} = \text{م}(١+\text{ب})[(١+\text{ب})^{\text{ن}} - ١]$ أو

$\text{ح ب} = \text{م}(١+\text{ب})^{\text{ن}+١} - \text{م}(١+\text{ب})$ وباضافة $\text{م}(١+\text{ب})$ للطرفين يحدث

$\text{ح ب} + \text{م}(١+\text{ب}) = \text{م}(١+\text{ب})^{\text{ن}+١}$ ثم نأخذ لوغاريتم الطرفين فيحدث

$\text{لو}[\text{ح ب} + \text{م}(١+\text{ب})] = \text{لو م} + (\text{ن}+١)\text{لو}(١+\text{ب})$

ثم نطرح لو م من الطرفين فيحدث

$\text{لو}[\text{ح ب} + \text{م}(١+\text{ب})] - \text{لو م} = (\text{ن}+١)\text{لو}(١+\text{ب})$

ثم نقسم الطرفين على لو (١ + ب) فينتج

$\frac{\text{لو}[\text{ح ب} + \text{م}(١+\text{ب})] - \text{لو م}}{\text{لو}(١+\text{ب})} = \text{ن} + ١$ ثم نطرح من الطرفين ١ فيحدث

$$\text{ن} = \frac{\text{لو}[\text{ح ب} + \text{م}(١+\text{ب})] - \text{لو م}}{\text{لو}(١+\text{ب})} - ١ \quad (٣)$$

وبواسطة هـذا القـانون يحسب مقـدار الزمن ولنطبقه على حل المسألة الاتية فنقول

مسألة ـ شخص استمر على وضع مبلغ ١٨٠ جنيها كل سنة ليربح ربحا مركبا بسعر ٥ ٪ وبعد مدّة استلم مبلغا قدره ٤٠٧٨٫٦٢٠ قيمة المبالغ التى وضعها وأرباحها فما المدّة التى استمر فيها على ذلك

الحل ــ نضع فى قانون (٣) السابق بدل الحروف مقاديرها فيحدث

$$\text{ن} = \frac{\text{لو}(٤٠٧٨٫٦٢٠ \times ٠٫٠٥ + ١٨٠ \times ١٫٠٥) - \text{لو } ١٨٠}{\text{لو } ١٫٠٥} - ١ \quad \text{أو}$$

$$\text{ن} = \frac{\text{لو } ٣٩٢٫٩٣١ - \text{لو } ١٨٠}{\text{لو } ١٫٠٥}$$ ــ ثم نبحث عن لوغاريتمات هذه الاعداد فنجد

$$\text{ن} = \frac{٢٫٥٩٤٣١ - ٢٫٢٥٥٢٧}{٠٫٠٢١١٩} - ١$$ وبعمل الحساب نجد

$$\text{ن} = ١٥ \text{ سنة}$$

٥٠٨ ــ رابعا ــ حساب السعر بعد معرفة المبلغ والزمن والجملة

لحساب السعر تأخذ القانون (١) السابق بنمرة (٥٠٥) وهو

$$\text{ج} = \frac{\text{م}(١+\text{ب})[(١+\text{ب})^{\text{ن}} - ١]}{\text{ب}}$$

ثم يعطى مقـــدار اختيارى تقريبى لربح الوحدة (ب) ويحسب الطرف الثانى من هذا القانون فان كان الناتج من حسابه مساويا للطرف الاول كان المقـدار الذى أعطى لكمية (ب) هو ربح الوحدة وبضربه فى مائة ينتج السعر المطلوب

أما اذا وجد أن الناتج من حساب الطرف الثانى أقل من الطرف الاول فيعلم أن المقـدار الاختيارى الذى أعطى لكمية (ب) أقل من مقدارها الحقيق (اذ معلوم أن كل ســعر أقل من الســعر الحقيق لاتصل به المبالغ الى الجملة المفروضة) وحينئذ فيلزم زيادة هذا المقدار شيأ فشيأ حتى ينتج المقدار الحقيق

وكذا اذا وجد أن الناتج من حساب الطرف الثانى أكبر من الطرف الاوّل يعلم أن المقدار الاختيارى الذى أعطى لكمية (ب أكبر من مقدارها الحقيقى وحينئذ يلزم نقص هذا المقدار شيأ فشيأ) حتى ينتج المقدار الحقيقى

واذا شوهد أن الطرف الاوّل انحصر بين مقدارين من المقادير الناتجة من حساب الطرف الثانى فيعلم أن مقدار ربح الوحدة منحصر أيضا بين المقدارين الاختياريين المنتجين لمقدارى الطرف الثانى المذكورين

ولنطبق ذلك على حل المسألة الآتية فنقول

مسألة ـ شخص كان يضع كل سنة مبلغ ٢٤٠ جنيها مصريا لتربح ربحا مركبا واستمر على ذلك مدّة ١٢ سنة ثم استلم مبلغ ٣٨٧٩ جنيها و٢٦٣ مليما قيمة ماوضعه مع أرباحه فما السعر الذى حسبت به تلك الارباح

الحل ـ يؤخذ قانون (١) السابق ويعوّض فيه الجملة والمبلغ والزمن بمقاديرها المذكورة فيحدث

$$\frac{240\,(1+\text{ب})\,[(1+\text{ب})^{12}-1]}{\text{ب}} = 3879,263$$

ثم يعطى لكمية (ب) مقدار اختيارى تقريبى (من المقادير المعتادة لربح الوحدة) وليكن ٠,٠٤ ثم نحسب مقدار الطرف الثانى من هذه المتساوية فنجد

$$\frac{240 \times 1,04\,(1,04^{12}-1)}{0,04} = 3749,554$$

وهذا المقدار أقل من الجملة المفروضـــة ٣٨٧٩,٢٦٣ بمقــدار ١٢٩,٧٠٩ وحينئذ يعطى لكمية (ب) مقــدار أكبر من ذلك وليكن ٠,٠٥ ثم نحسب ثانيا مقدار الطرف الثانى فنجد

$$\frac{٢٤٠ \times ١,٠٥ \left((١,٠٥)^{١٢} - ١ \right)}{٠,٠٥} = ٤٠١١,٢٣٥$$

وهــذا المقــدار اكبر من الجملة المفروضــة ٣٨٧٩,٢٦٣ بمقــدار ١٣١,٩٧٢

وحيث انه بجعل ب = ٠,٠٤ نتج مقدار أقل من الطرف الاول (الجملة المفروضة) وبجعل ب = ٠,٠٥ نتج مقدار أكبر من الطرف الاول المذكور فيعلم أن مقـــدار (ب) محصور بين ٠,٠٤ و ٠,٠٥ فاذا جعلناه ٠,٠٤٥ وحسب مقدار الطرف الثانى نجد

$$\frac{٢٤٠ \times ١,٠٤٥ \left((١,٠٤٥)^{١٢} - ١ \right)}{٠,٠٤٥} = ٣٨٧٩,٢٦٣$$

وهذا المقدار هو عين الطرف الاوّل أى مقــدار الجملة المفروضــة فيكون مقــدار ب = ٠,٠٤٥ والســعر المطلوب هو ٤,٥ فى المـــائة

مسائل على الوضع السنوى

(٩٨٨) زيد يقتصــد من ايراده فى كل ســنة مبلغا قدره ٣٠٠ جنيه و يضعها فى بنك بربح مركب بسعر ٥ ٪ فما مقدار مااقتصده وأرباحه مدة ٢٠ سنة

(٩٨٩) شخص حينما كان عمر ولده ثمان ســنوات عزم على أن يحجز له مبلغا فى كل سنة ويضعه فى بنك بالربح المركب بسعر ٣,٥ ٪ حتى اذا بلغ ولده سن التاسعة عشرة سنة يكون قد حصــل له من هذه المبالغ وأرباحها ٢٠ جنيها مصريا ليدفعها فى بدلية العسكرية فما مقدار مايحجزه فى كل سنة

(٩٩٠) داوم شخص على وضــع مبلغ ٧٢ جنيها كل ســنة فى بنك لتربح ربحا مركبا بسعر ٤,٥ ٪ فبعد كم سنة ينتج له من مبالغه وأرباحها ١٢١٢ جنيه و ٢٧٠ مليم

(٩٩١) ماالسعر الذى وضع به مبلغ ٧١٥ فرنكا كل سنة ليربح ربحا مركبا ويؤل بعد ١١ سنة الى جملة مقدارها ١٠٠٢٥٫٧٧٣ فرنكا

(٩٩٢) راغب كان يقتصد كل سنة ١٠٠ جنيه و يضعها فى بنك لتربح ربحا مركبا بسعر ٤٫٥ ٪ واستمر على ذلك مدة ٧ سنين وكامل ماأمكنه أن يقتصد غير ٩٠ جنيها كل سنة ولكنه كان يضعها فى بنك آخر واستمر على ذلك مدة ٧ سنين أيضا و بعمل الحساب وجد أن كاملا أخذ أرباحا على مبالغه التى كان يضعها زيادة عن أرباح راغب بقدر ١٫٢٧٩ جنيه فبأى سعر كان كامل يضع أمواله

(٩٩٣) شخص كان يضع كل سنة ٢٠٠ فرنك فى بنك لتربح ربحا مركبا بسعر ٥ ٪ و بعد مدة استلم مبلغ ٤٥٣١٫٨٠ فرنكا فما مقدار المدة التى كانت فيها هذه المبالغ فى البنك

(٩٩٤) مامقدار المبلغ الذى يوضع كل سنة مدة ١٢ سنة ليربح ربحا مركبا بسعر ٥ ٪ ليفتج من هذه المبالغ وأرباحها ١٠٠٠ جنيه مصرى بالتمام

مسائل عمومية على جميع قواعد علم الحساب

(٩٩٥) اشترك أربعة تجار فى شراء بضاعة بمبلغ ٤٧٥٥ جنيها مصريا فدفع الاول قدر مادفعه الثانى والثالث ودفع الثانى قدر مادفعه الثالث والرابع ودفع الثالث ثلاثة أمثال مادفعه الرابع فما مقدار مادفعه كل منهم

(٩٩٦) اقسم مبلغ ٢٣٥٩٥ قرشا بين خمسة أشخاص بحيث تكون حصة الاول ثلاثة أمثال حصة الثانى وحصة الثانى ثلاثة أمثال حصة الثالث وهكذا

(٩٩٧) اشترى رجل ٢٠ رطلا من السكر و ٨ أرطال من البن وثلاثة أرطال من الشاى بمبلغ ١٢٠ قرش وكان ثمن كل ٣ أرطال من البن يساوى ١٥ رطلا من السكر وثمن الرطل من الشاى أربعة أمثال ثمن الرطل من البن فما ثمن الرطل من كل نوع

(٩٩٨) ماهو أكبر عدد اذا قسم عليه ١٦٠٢ يكون الباقى ٦ واذا قسم عليه ١٤٣٣ يكون الباقى ٥

(٩٩٩) ثلاثة أعداد صحيحة حاصل ضربها ١٤٨١٧٦ والقاسم المشترك الاعظم للاول والثانى هو ١٤ والمضاعف البسـيط لهما ١٦٨ والقاسم المشترك الاعظم للاول والثالث ٢١ والمضاعف البسيط لهما ١٢٦ فما هى الاعداد الثلاثة

(١٠٠٠) فرق محسن مبلغا قدره ٥٠٧ مليمات على جملة فقراء بالتساوى ثم جاء أولئك الفقراء بعد مدة ففرق عليهم ٢٣٤ مليما بالتساوى أيضا فاذا علم أن عدد الفقراء أكثر من ٣٠ فما مقدار ماأخذه الواحد منهم فى كل مرة

(١٠٠١) شخص عليه دين وعنـده قطعة أرض ومنزل يبلغ ثمنهما ١٢٠٠ جنيه فوجد أنه اذا باع قطعة الارض ليسدد بثمنها الدين يبقى عليه ٧٥ جنيها ولو باع المنزل ليسدد من ثمنه الدين يبقى له ١٢٥ جنيها فما مقدار الدين وما ثمن كل من قطعة الارض والمنزل على حدته

(١٠٠٢) محسن كان يتصدق بزكاة أمواله فى كل سنة على الفقراء ففى أول سنة أعطى كل فقير خمسة ريالات وفى ثانى سـنة أعطى كل فقير ثلاثة ريالات واثنى عشر قرشا وفى ثالث سنة كان نصيب كل فقير ريالين وقرشين وفى رابع سنة كان نصيب كل فقير ريالا ونصفا فمن بعـد معرفة أن المبالغ التى كان يفرقها فى هذه السنين متساوية وان كلا منهما أقل من ١٣٠ جنيها يراد معرفة أحدها وعدد الفقراء فى كل سنة

(١٠٠٣) ابحث عن كسر يعادل $\frac{٧}{٨}$ بشرط أن يكون مجموع حديه ١٣٥ وعن كسر يعادل $\frac{١١}{٢٥}$ ويكون فرق حديه ٩٨

(١٠٠٤) أناء فيه مخلوط مركب من ١٠ أرطال من اللبن ورطلين من الماء وإناء آخر فيه ٨ أرطال من اللبن و ٤ أرطال من الماء رفع من كل منهما ٤ أرطال ثم صب فى الاناء الاول ماأخذ من الثانى وصب فى الثانى ماأخذ من الاول فكم رطلا من اللبن والماء فى كل أناء منهما

(١٠٠٥) صرف تلميذ ثلث مرتبه السنوى فى شراء كتب خصوصية و٠٫٦ من الباقى فى احتياجاته الضرورية ووفر ٥٦٠ قرش فما مقدار مصروفه السنوى

(١٠٠٦) شخصان سافرا بالسكة الحديدية ومعهما ٢٣٢ كيلوجرام من العفش فطلب من أحدهما ٢٢٥ مليم وطلب من الثانى ٣٣٥ مليم قيمة أجرة العفش الزائد عن المسموح به لهما ولو كان هذا العفش لشخص واحد لطلب منه ٦٨٠ مليم فما مقدار المسموح به للشخص الواحد

(١٠٠٧) ٢٤ عاملا حفروا أساس عمارة وأخذوا أجرة قدرها ٢١٨٤ قرش فما مقدار أجرة النفر فى اليوم اذا علم انهم حفروا $\frac{٢}{٧}$ الاساس فى ٤ أيام

(١٠٠٨) محل فرجة صرف ١٠٠ تذكرة من الدرجة الاولى و ٢٠٠ تذكرة من الدرجة الثانية و ٤٠٠ تذكرة من الدرجة الثالثة وحصل على مبلغ ١٠٨ جنيه مصرى فاذا كان ثمن التذكرة من الدرجة الاولى $\frac{٢}{٣}$ من تذاكرة الدرجة الثانية وثمن التذكرة من الدرجة الثانية $\frac{٣}{٤}$ ثمن التذكرة من الدرجة الاولى فما يكون ثمن التذكرة من كل درجة

(١٠٠٩) زيد يمكنه أن يتمم عملا فى ١٥ يوما وعمر يمكنه أن يتممه فى ١٦ يوما وبكر يمكنه أن يتممه فى ١٨ يوما فاشتغلوا فى عمل يوما ونصفا ثم تغيب بكر ٣ أيام ولما حضر تمم الباقى وحده فى ثلاثة أيام فما نسبة شغله الثانى الى الاول فى اليوم

(١٠١٠) سئل تلميذ أن يضرب كسرا فى $\frac{٥}{٧}$ فنسى وقسمه على $\frac{٥}{٧}$ ولذلك كان جوابه يزيد عن الجواب الحقيقى بمقدار $\frac{١٨}{٣٥}$ فما الجواب الحقيقى

(١٠١١) قصد شخص جهة فركب عجلة مدة ثم ركب بالسكة الحديدية مسافة ٦٠ كيلومتر ووصل الى المحل المطلوب فى مدة ٤ ساعات فمن بعد معرفة أن سرعة العجلة ثلث سرعة الوابور وانه لو ركب بالسكة الحديدية كل المسافة لوفر $\frac{٤}{٩}$ ١ ساعة يراد أولا معرفة سرعة الوابور فى الساعة ثانيا سرعة العجلة ثالثا طول الطريق

(١٠١٢) وابور بضاعة سرعته ٢٥ ميلا انجليزيا فى الساعة قام من محطة قبل وابور الاكسبريس بساعة وسرعة وابور الاكسبريس ٤٠ ميلا فى الساعة فوصل وابور البضاعة لمحطة قبل وابور الاكسبريس بخمسة عشر دقيقه والمطلوب معرفة المسافة الكائنة بين المحطتين بالكيلومتر

(١٠١٣) شخصان معهما ١٨٠٠ فرنك وربع مامع الاول وخمس مامع الثانى يساويان ٤١٠ فرنك فما مقدار مامع كل منهما

(١٠١٤) مجموع عددين ٦٦ وكان ثلث وربع الاول يساويان نصف وخمس الثانى فما هما العددان

(١٠١٥) ساعة تبين الساعات من ١ الى ٢٤ بمعنى أن وجهها ينقسم الى ٢٤ ساعة (عوضا عن تقسيمه فى الساعات المعتادة الى ١٢) فتى ينطبق فيها عقرب الدقائق على عقرب الساعات بين الساعة الاولى والثانية

(١٠١٦) يشـــتغل بكر وخالد عملا فى $\frac{٢}{٣}$ ٦ أيام ويتم هذا العمـــل خالد وسالم فى $\frac{١}{٢}$ ٧ أيام ويتمه الثلاثة معا فى ٥ أيام فاذا اشتغل خالد وبكر يومين ثم اشتغل سالم بدل خالد ففى كم يوم يتمان باقى العمل

(١٠١٧) شخص صرف فى أول شهر ٢٥٠ قرشا زيادة عن $\frac{٣}{٤}$ ايراده الشهرى وصرف فى ثانى شهر ١٠٠ أقل من $\frac{١١}{١٢}$ من ايراده وفى ثالث شهر صرف $\frac{٧}{٨}$ ايراده فبلغ مجموع ماوفره فى الثلاثة الاشهر ٤٠٠ قرش فما مقدار ايراده الشهرى

(١٠١٨) دفع مبلغ ٢٢ فرنك فى شراء ١٠ أزواج من الجوربات بحيث ان ثمن أربعة منها يعادل ثمن الستة الباقية فكم شلنا تدفع فى شراء ٦ دست من جنس الاربع جوربات وسبع وست من جنس الستة

(١٠١٩) قطعة أرض مساحتها ٣٩٩٠,٧٨٧٥ آرقومت بمبلغ ٧٩٨٠ جنيها انجليزيا فما ثمن الفدان بالعملة المصرية

(١٠٢٠) قوائم التلغراف متباعدة عن بعضها بمقدار $\frac{٢}{٣}$ ٥٨ يارده فعلى كم قائمة يمر فى الدقيقة قطار سرعته ٤٨ ميلا انجليزيا فى الساعة

(١٠٢١) تاجر اشترى كميـــة من القمح بمبلغ ٤٥٠٠ فرنكا فباع منها ٣٢ اردبا بمبلغ ١٠٣٩,٢٠ فرنكا ووجد أنه اكتسب ١,٢٥ فرنك فى الهكتولتر فما مقـــدار الهكتولترات التى اشتراها

(١٠٢٢) قصد ساع بلدا فمشى بسرعة ٤٫٥ أميال فى الساعة ولما صار على بعد ١٨ ميــلا من البلدة المقصودة تقابل مع ساع آخر فرجع ميــلا سائرا بسرعة الثانى ثم تركه وعاد ثانيا الى محل قصــده وبوصوله وجد أنه تأخر نصف ساعة والمطلوب أولا معرفة سرعة الساعى الثانى فى الساعة ثانيا السرعــة التى كان يلزم أن يمشى بها الساعى الاول حتى يصل الى النقطة بدون تأخير

(١٠٢٣) شخص أراد أن يشترى ٣٫٢٥ ياردات من الجوخ الذى ثمن اليارده منه ٨ شلن لعمل عباءة لكنه وجد أنه اذا أضاف ٤٫٥ قروش الى ثمن هذا الجوخ أمكنه ان يشـــترى صوفا من الذى ثمن المتر منه ٢٥ قرشا ويكون كافيا لعمــل عباءة وجبة والمطلوب معرفة عدد الامتار التى تؤخذ من هــذا الصوف لعمل الجبة فقط (بفرض اتحاد عرضى الجوخ والصوف)

(١٠٢٤) زيد يملك ٥٠٠ فدان وعمرو يملك ٣٠٠ فدان فدفع لهما بكر ٨٠٠٠ جنيه لتقسم جميع الاطيان بينهم بالتســاوى فما مقدار مايأخذه زيد من هــذا المبلغ وما مقدار مايأخذه عمرو

(١٠٢٥) قطار طوله ٨٠ متر وسرعتـــه ٣٠ كيلو متر فى الساعة مر على قنطرة فى ٣٤ ثانية فما طول القنطرة

(١٠٢٦) عسكرى بوليس خرج ليقبض على سارق متباعد عنه بمقدار ٥٢٨ ياردة وكانت سرعة العسكرى ميلا انجليزيا فى كل ســبع دقائق وسرعة السارق ميلا فى كل عشر دقائق فما مقدار الزمن الذى يستغرقه العسكرى حتى يدرك السارق

(١٠٢٧) أراد أعرابى أن يبيع ١٦ كبشا فى السوق القريب منه لكنه علم أنه يربح فى كل رأس ٣ قروش اذا باعها فى سوق بعيــد عنه ولطمعه فى المــكسب قصد السوق الثانى غــير أن ثلاثة رؤس من غنمــه مرضت فى الطريق من أتعاب السفر فاضــطر أن يبيعها بنقص ربع الثمن وبذلك قبض فى الاغنام جميعها ٢٧٤٫٥ فرنكا والمطلوب معرفة مقــدار الخسارة التى لحقته بسبب بعــد السوق عما اذا كان باعها فى السوق القريب

(١٠٢٨) صانع اشتغل مدة ٣٠ يوما عند شخصين وكان الاول يحاسبه على ٥٫٥ فرنك فى اليوم والثانى يحاسبه على ٦٫٣٠ فرنك وبلغت أجرته فى هذه المدة ١٧٤٫٦٠ فرنكا فكم عدد الايام التى اشتغلها عند كل منهما

(١٠٢٩) صانع اشتغل عند خياط باجرة يومية قدرها ٥٫٤٠ فرنك ولكنه اشترط عليه أنه اذا انقطع عن الشغل يدفع ٣ فرنك غرامة فى كل يوم انقطعه ويعمل حسابه فى مدة ٢٧ يوما دفع له ١٠٣٫٨٠ فرنك فما عدد الايام التى انقطعها عن الشغل فى هذه المــــــدة

(١٠٣٠) قطعة أرض مربعة الشكل مساحتها ١٣٣٢٢٥ قصبة مربعة وقطعة أرض مربعة الشكل أيضا تزيد عن الاولى قصبة واحدة فى كل من الطول والعرض فعلى كم فدان تشتمل الثانية زيادة عن الاولى

(١٠٣١) حجرة مربعة الشكل لزم لها بساط ثمنه ٣٧٫٢١ فرنك وكان سعر المتر المربع ٤ فرنكات فما أحد أبعاد هذه الحجرة

(١٠٣٢) حجرة مستطيلة الشكل طولها ضعف عرضها فرشت ببساط ثمنه ٢٧٢٫٢٥ فرنك بسعر المتر المربع ٤٫٥ فرنك فما مقدار ثمن بساط من هذا النوع لفرش قاعة أخرى تزيد فى كل من الطول والعرض مترا عن الاولى

(١٠٣٣) سائح صرف فى نزل ٥١٢ فرنك فكان مايصرفه فى هذا النزل فى اليوم بقدر نصف عدد الايام التى أقامها فى النزل فكم عدد الايام وما مقدار مصروفه اليومى

(١٠٣٤) تاجر أخذ من آخر مترا مكعبا من زيت البترول فكم صفيحة يردها له من صفائح مكعبة طول وعرض وارتفاع الواحدة من الداخل هو ربع متر

(١٠٣٥) قطعة من ألماس وزنها قيراطان وثمنها ٣٢ جنيها فما يكون ثمن قطعة تزن ٣ قراريط من بعد معرفة أن قيمة ألماس تناسب مربع وزنها

(١٠٣٦) البعد بين بلدين على كرة أرضية صناعية ٣٧٫٥ مليمتر فاذا كان طول محيط دائرة عظيمة من هذه الكرة يساوى ١٫٨٧٥ متر فما البعد الحقيقى بين المدينتين

(١٠٣٧) في سباق طوله ١٠٠ متر أحمد سبق محمودا بمقدار ٥ أمتار وفي سباق طوله ٢٠٠ متر محمود سبق حسنا بمقدار ١٠ أمتار فكم مترا يسبق أحمد حسنا في سباق طوله ٤٠٠ متر

(١٠٣٨) فرس مرت ملكيتها بين أيدي ثلاثة أشخاص وكان كل منهم لا يبيعها الا اذا ربح ١٠ ٪ من ثمن مشتراها وعلى هذه الحالة باعها الثالث بمبلغ ٣٣ جنيها و ٥ شلنات و ٦ بنسات فما الثمن الذي اشترى به الاول

(١٠٣٩) تاجر ربح مبلغ ١٠٫١٢٥ قرش في جملة أرطال باعها من البن فاذا كان هذا الربح يعادل ٠٫١٠ ٪ وكان عدد الارطال التي باعها خمسة أمثال ثمن الرطل في حالة البيع فما عدد الارطال وما ثمن الرطل

(١٠٤٠) اشترى رجل مقدارا من البرتقال بسعر ٥ بقرش ثم اشترى مقدار مساويا للاول بسعر ٧ بقرش وباع الجميع بسعر ٦ بقرش فهل ربح أم خسر وكم في المائة

(١٠٤١) تاجر باع حصانين كل واحد منهما بمبلغ ١٠٠ جنيه فربح في أحدهما ١٥ ٪ وخسر في الثاني ١٥ ٪ فما مقدار الثمن الذي اشترى به كلا منهما وكم ربحه أو خسارته في الاثنين

(١٠٤٢) تاجر يكسب ٢٥ ٪ من الثمن الذي يشترى به وقد تنازل لزبون عن ١٢ ٪ من الثمن الذي يبيع به فما مكسبه في المائة من عميله

(١٠٤٣) عطار اذا باع دستة الشمع بمبلغ ٣ قروش يكسب $\frac{1}{8}$ الثمن الذي اشترى به فما ربحه في المائة اذا باعها بمبلغ $\frac{1}{2}$ ٣ قروش

(١٠٤٤) اشترى رجل حصانين يزيد ثمن أحدهما عن ثمن الآخر ٢٥ جنيها فباع الاول بربح ١٥ ٪ والثاني بربح ١٨ ٪ وبذلك اكتسب ٥١ جنيها وستمائة مليم والمطلوب معرفة ثمن كل حصان منهما

(١٠٤٥) متوسط درجة الحرارة في أيام الاثنين والثلاثاء والاربعاء ٢٨٫٥ درجة ومتوسط درجة الحرارة في أيام الثلاثاء والاربعاء والخميس ٣١ درجة فاذا كانت درجة حرارة يوم الخميس ٣٤ فما يكون درجة حرارة يوم الاثنين

(١٠٤٦) مدرسة بها ٤٠٠ تلميذ متوسط سنهم ١١ سـنة فنقل ٤٠ تلميذا منهم الى مدارس أخرى فبلغ متوسط سن الباقين $\frac{٢}{٣}$ ١٠ فما متوسط سن المنقولين

(١٠٤٧) أورطة بها ٨٠٠ عسكرى متوسط سنهم ٢٣٫١٢٥ سـنة رفت منها ١٥٠ عسكرى لاستيفائهم مدة الخدمة واستعيضوا بعساكر جديدة متوسط سنهم ٢٠ سنة وبذلك بلغ متوسط سن عساكر الاورطة ٢١٫٢٥ فما متوسط سن المرفوتين

(١٠٤٨) ثلاثة شركاء رأس مالهم ٤٥ جنيهامصريا و٢١٠ وينتو و٩٥ جنيها انجليزيا ربحت شركتهم ٧٤٩١ فما مقـدار رأس مال كل شريك ونصيبه فى الربح اذا كان الاول وضع ثلاثة أمثال الثانى و وضع الثانى نصف الثالث

(١٠٤٩) خبازعنده نوعان من الدقيق ثمن كل ١٠٠ كيلوجرام من الاول ٤٦٫٥ فرنك ومن الثانى ٤٤ فرنك ومعتاد على أن يخلط هذين النوعين بنسـبة ٣ الى ٢ فبعد معرفة أن كل ١٠٠ كيلوجرام من الدقيق ينتج منها ١٣٢ كيلوجرام من الخبز يراد أولا معرفة مايلزم أخذه من كل من هذين النوعين لعمل ٣٣٠ كيلوجرام من الخبز ثانيا ثمن الدقيق اللازم لذلك

(١٠٥٠) محسن دخل مسجدا وأعطى أول فقير قابله عشرة مليمات ثم أعطى بعد ذلك كل فقير قابله أقل ممن قبله بمقـدار ثابت و بذلك فرق ٥٥ مليما على عشرة فقراء فما مقدار ماأخذه الفقير العاشر وما هى الكمية التى كان ينقص بها كل فقير عن قبله

(١٠٥١) اتفق مدين مع دائنه على أن يسدد ماعليه من الدين بأن يدفع له فى كل أسبوع مقدارا فدفع فى أول أسبوع ٨٢٠٠ قرش ونقص فى الاسبوع الثانى ٣٠٠ قرش عما دفعه فى الاسبوع الاول وهكذا كان يدفع فى كل أسبوع أقل من سابقه ٣٠٠ قرش فسدد ماعليه فى ٢٨ أسبوعا فما مقدار مادفعه فى آخر أسبوع وما مقدار ما كان عليه

(١٠٥٢) اذا فرض أن حبة القمح لو زرعت ينتج منها خمسون حبة ولو زرعت الخمسون حبة ينتج من كل منها خمسون حبة وهكذا فما مقدار الحب المتحصل من الزراعة بعد ١٢ سنة

(١٠٥٣) مخترع الشطرنج لما قدمه الى ملكه ورأى الملك حسن صنع ماأبداه أمره أن يطلب من المكافأة ما يتمناه فطلب المخترع حبة قمح فى مقابلة العين الاولى وحبتين فى مقابلة العين الثانية وهكذا بالتضعيف الى العين الرابعة والستين فما عدد حب القمح الذى طلبه المخترع

(١٠٥٤) خادم خائن كان يسرق كل يوم رطلا من خابية تسع ٢٣٠ رطلا من ماء الزهر وكان يضع بدل كل رطل يسرقه رطلا من الماء واستمر على ذلك ستين مرة فعلى أى نسبة يكون تركيب المخلوط أخيرا

(١٠٥٥) وضع مبلغ فى بنك مدة ٨ أشهر فبلغ مع ربحه ١٢٧٧٫٢٠ فرنك ثم وضع المبلغ الاصلى مدة ١٥ شهرا بالسعر عينه فبلغ مع ربحه ١٣٠٩٫٧٥ فرنكا فما مقدار المبلغ وما مقدار السعر

(١٠٥٦) ثلاثة أشخاص وضعوا فى بنك ١٢٠٠ جنيه وبعد ٨ سنين أخذ كل منهم مايخصه من ربح ورأس مال نخص الاول ٩٧٢ جنيها والثانى ٥٢٨ جنيها والثالث ٢٦٤ جنيها فما مقدار ماوضعه كل منهم

(١٠٥٧) شخص اقترض من بنك مبلغا بسعر ٥ ٪ وبعد مضى ثلاث سنين وأربعة أشهر رد الى البنك ٧٠٠٠ جنيه انجليزى و ٢٠١ وينتو و ٨١ جنيها مصريا و ٤٤١ مليما قيمة ما كان اقترضه مع أرباحه المركبة فكم كان المبلغ المقترض

(١٠٥٨) شخص اقترض ٦٠٠ جنيه مصرى وبعد ٣ سنين دفع الى البنك قيمة ما كان اقترضه مع أرباحه المركبة فبلغت ١٩٤٫٥٧٥ جنيها مصريا فكم كان السعر

(١٠٥٩) شخص اشترى ٢٥٫٠٢٥ هكتار بسعر الفدان ٦٠ جنيها ودفع $\frac{٢}{٣}$ الثمن ويريد أن يسدد الباقى وأرباحه المركبة بسعر ٤ ٪ فى ثلاث سنوات بحيث يدفع كل ٦ أشهر قسطا فما مقداره

(١٠٦٠) اذا وضعت ٧٩٠ جنيها فى شراء ســندات ذات ٤ ./. بسعر $\frac{٥}{٨}$ ٨٧ جنيها ثم بعت هذه الســندات بسعر ٩٠ جنيها فماذا يحدث من التغيير فى ايرادى اذا وضعت ثمن ذلك فى شراء أسهم بسعر ١٥٠ جنيه ذات ايرد $\frac{١}{٢}$ ٧ ./. وكان الثمن الاساسى للسهم ١٠٠ جنيه

(١٠٦١) شخص وضع ٦٨٢٥ جنيها فى شراء سندات ذات ٣./. بسعر ٩١ وباع منها ٥٠٠٠ جنيه سندات حينما ارتفع السعر وصار $\frac{١}{٢}$ ٩٣ جنيها وباع الباقى حينما نقص السعر وآل الى ٨٥ جنيها فما مكسبه أو خسارته فى ذلك واذا وضع ماحصل عليه فى شراء سندات ذات $\frac{١}{٢}$ ٤ ./. بالسعر المعتدل فماذا يطرأ على دخله السنوى

(١٠٦٢) اذا كان ثمن ٣ ./. ســندات هو ٩١ جنيها و$\frac{١}{٢}$ ٣ ./. سندات هو ١٠٦ جنيها فما الفرق بين السعرين فى المائة بالنسبة للمبلغ المدفوع وما يكون هذا الفرق اذا كان هناك سمسرة $\frac{١}{٨}$ ./. على النوع الثانى

(١٠٦٣) رجل عنده سندات من ذات ٣ ./. يحصل منها على ايراد سنوى قدره ٢٤٠ جنيها باع ربع هذه السندات بسعر $\frac{١}{٤}$ ٨٧ جنيها واشترى بثمنها سندات سكة حديد بسعر $\frac{١}{٢}$ ١٧٤ جنيها فما الربح فى المائة لهذه السندات اذا وجد أن دخله السنوى زاد ٤٠ جنيها

(١٠٦٤) ماهو المبلغ الموضوع بالربح المركب اذا كان ربحه فى آخر الســنة الاولى ١٥ جنيها و ١٢ شلنا و ٦ بنسات وفى آخر السنة الثانية ١٦ جنيها وشلنا واحدا و$\frac{١}{٢}$ ١٠ بنسات

(١٠٦٥) اذا كان ربح مبلغ ٤٥٠٠ جنيها بسعر ٣ ./. لمدة ما هو قدر الحطيطة الداخلية لكمبيالة بمبلغ ٥٥٧٣ جنيها و ١٥ شلنا بالســعر عينه فى المدة عينها فما الزمن الباقى لاستحقاق هذه الكمبيالة

(١٠٦٦) اذا كانت الحطيطــة الداخليــة لمبلغ هى ٥ جنيهات و ٩ شلنات و$\frac{١}{٢}$ ٤ بنسات وربح ذلك المبلغ أزيد من هذه الحطيطة بمبلغ جنيه واحد و ١٠ شلنات و$\frac{١}{٢}$ ٧ بنسات فما هو المبلغ

(١٠٦٧) مر قطار اكسبريس طوله $\frac{1}{3}$ ١١٢ ياردة على محطة طولها ١٨١ ياردة في مدة ١٠ ثوان فما السرعة التي كان سائرا بها

(١٠٦٨) قطار طوله ١٠٠ ياردة قابل قطارا آخر سائرا في ضد اتجاهه وكان سرعة الاول ٣٥ ميلا في الساعة وسرعة الثاني ٤٥ ميلا واستغرقا ٦ ثوان في المرور ببعضهما فما طول القطار الثاني

(١٠٦٩) خرج قطار طوله ٨٨ ياردة من محطة بسرعة ٣٥ ميلا في الساعة وقابل قطارا آخر عائدا اليها طوله ٨٨ ياردة الساعة ١٢ ومرّ به في ٦ ثوان ثم قابل القطار الاول قطارا آخر طوله ١٣٨ ياردة الساعة ١٢ و١٥ دقيقة و٦ ثوان ومرّ به في ٦ ثوان أيضا ففي أي وقت يلحق الثاني الاول

(١٠٧٠) مر قطار طوله ٩٥ مترا في مدة ٦ ثوان على رجل سائر في اتجاه القطار بسرعة ٣ كيلو متر في الساعة ثم قابل هذا الرجل قطار آخر طوله ٨٦ ياردة سائرا بعكس اتجاه الرجل فمر به في $\frac{1}{5}$ ٧ ثوان فاذا فرض أن القطار الثاني قابل القطار الاول ففي كم ثانية يمر كل منهما بالآخر

(هذا) وأحمد الله على توفيقه باتمام هذا الكتاب الجامع لقواعد علم الحساب الشامل للمسائل التي لاغنى عنها في المعاملات الانسانية زيادة عن توسيعها لنطاق القوى العقلية

وأرجو ممن اطلع فيه على زلة من الاصل أو هفوة من الطبع أن يصلحها بفكره الثاقب ويحررها برأيه الصائب وليكن غرضه المنفعة والاصلاح ما استطاع وما توفيقنا الا بالله جعله الله خالصا لوجهه الكريم ونفع به النفع العميم والصلاة والسلام على النبي وآله مسك الختام

محمد ادريس

(فهرست الجزء الثالث من كتاب الدرر البهية في الاصول الحسابية)

صحيفه	
٢	النسبة
٤	خواص النسبة
٧	التناسب
١٧	المقادير المتناسبة طرديا
١٩	المقادير المتناسبة عكسيا
٢١	القاعدة الثلاثية
٢٢	حل مسائل القاعدة الثلاثية
٢٣	حل مسائل القاعدة الثلاثية البسيطة بطريق الوحدة
٢٧	حل مسائل القاعدة الثلاثية المركبة
٣١	حل مسائل القاعدة الثلاثية المركبة بطريق الوحدة
٣٦	حساب المائة
٣٩	المكسب والخسارة
٤٦	التقسيم التناسبي
٤٩	الشركة
٥٤	المتوسط الحسابي
٥٦	الخلط والمزج وسبك المعادن
٦٧	المتواليات العددية
٧٤	المتواليات الهندسية
٨٢	اللوغاريتمات
٨٤	الخواص الاساسية للوغاريتمات
٨٧	تكوين جداول اللوغاريتمات
٨٨	خواص العدد البياني
٩٠	خواص العدد البياني السالب
٩٢	شرح جدول اللوغاريتم وكيفية استعماله
١٠١	عمليات اللوغاريتمات
١٠٧	المتمم اللوغاريتمي
١١١	الربح
١١٢	الربح البسيط
١١٨	قوانين الارباح البسيطة
١٢٤	الربح المركب
١٣٢	الحطيطة
١٣٣	الحطيطة الخارجية
١٣٤	الحطيطة الداخلية
١٣٨	الاجل المتوسط أو المشترك
١٤٠	الاسهم والسندات
١٥٥	الدفع السنوى ـ الاستهلاك
١٦٤	الوضع السنوى
١٧١	مسائل عمومية على جميع قواعد علم الحساب

(م م ٢٢٩٧/٩٠٨/٦٠٠٠)


Bibliotheca Alexandrina
0556913